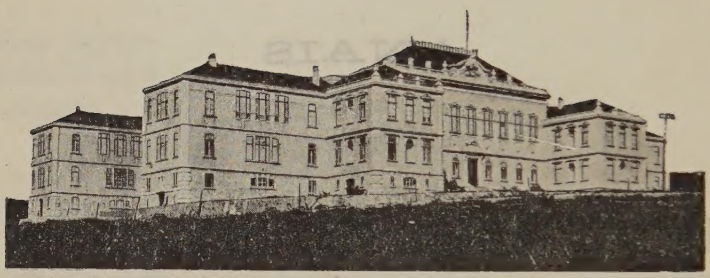
ANAIS

DO

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA



Instituto Superior de Agronomia

ANAIS

DO

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Vol. IV—Fasc. 2.º

1931

IMPRENSA LIMITADA

Convento dos Marianos—R. das Janelas Verdes

LISBOA

ANAIS

DO

INSTITUTO SUPERIOR DE AGRONOMIA

Vol. IV — Fasc. 2.º

Errata

Pág.	Linha	Em vez de	Leia-se
58	—	(Na figura, o arco que indica o ângulo horário t deve prolongar-se até à linha PS)	
59	30	sen n sen δ	$-$ sen n sen δ
60	12	cos φ sen δ	$-$ cos φ sen δ
63	32	cos c	sen c
67	34	sen b	cos b
69	6	$\frac{\cos (t-\lambda)}{\cos \lambda}$	$\frac{\cos \lambda}{\cos (t-\lambda)}$
70	1	actor	factor
70	18	$-\operatorname{tg}^4 \frac{\lambda}{2}$	$-\frac{1}{2}\operatorname{tg}^4 \frac{\lambda}{2}$
72	28	cos ($\tau - \lambda + N$)	cos ($t - \lambda + N$)
73	7	(18)	(19)
73	12	(22)	(20)
74	17	($t_l - \gamma$)	($t_l - \lambda$)
77	12	h cos δ_l sen t_l cos b sen a	cos δ_l sen t_l cos b sen a
80	25	$\theta' + \theta$	$\theta' - \theta$
85	13	sec δ	sec τ
85	14	cos τ	cos λ
87	33	em	de
89	23	(26)	(36)
94	1	E W	E e W
96	18	$\Delta \varphi$	Δt
99	4	cos φ_l	cos φ'
100	3	$\frac{\text{1 divisão de nível}}{\text{2 n}}$	$\frac{\text{1 divisão do nível}}{\text{2 n}}$
100	9	N	S
102	5	37º 60′	37º 50′
105	6	B	B′
106	9	δ	δ'
107	26	STE	MTE
108	30	p r sen (Θ — M)	p r m sen (Θ — M)
108	36	$a \Delta k\, b + p$	$a \Delta k + b\, p$

As observações de passagens de estrêlas no primeiro vertical

POR

VICTOR HUGO DE LEMOS

Doutor em Matemática (U. L.)
Major de artilharia, eng. fabril do Exército
Professor catedrático do Instituto Superior de Agronomia

Deve-se a Roemer, no princípio do século XVIII, a ideia de colocar um instrumento de passagens no primeiro vertical.

A instalação fêz-se no seu observatório de Copenhague, para determinar, por observações do Sol, as posições dos pontos equinociais.

A verdadeira aplicação que o instrumento de passagens, colocado nessa posição, tem hoje, só porém foi indicada no final do primeiro quartel do século XIX pelos eminentes astrónomos que foram Bessel e Struve. O valor das observações de passagens feitas na proximidade do zénite e em particular a precisão dos valores da latitude assim deduzidos tornaram o método aconselhável nas operações que se estavam efectuando para determinar a figura da terra; Bessel usou-o na medida do arco de meridiano da Prussia tendo também recorrido a êle, em várias estações do arco de meridiano russo, W. Struve e o general Teuner.

Logo que iniciou as suas observações, W. Struve convenceu-se de que um instrumento especialmente construído para observar passagens no primeiro vertical poderia fornecer resultados de tão grande precisão que seria possível determinar os valores das constantes de aberração e de nutação e os da paralaxe anua das estrêlas, resolvendo os problemas de astronomia que eram a preocupação dos astrónomos da época.

Quando, por isso, em 1834, tratava da encomenda dos aparelhos que deviam ser instalados no observatório de Poulkova propôs à casa Repsold de Hamburgo, o fabrico de um instrumento de passagens destinado a essas observações.

A particular predilecção de Struve por êsse instrumento manifestou-se

desde o fabrico levando-o, por duas vezes, a Hamburgo para discutir com os fabricantes os detalhes da sua construção.

De 1840 a 1842, W. Struve fêz na nova luneta de passagens uma série notável de observações de que deduziu o valor da constante de aberração.

Propondo-se, em seguida, fazer, durante o longo período do movimento do nodo lunar, as observações necessárias para determinar a constante de nutação tomava um programa que não poude infelizmente levar ao fim.

Em 1857, isto é dois anos antes de decorrer o período estabelecido para as observações, a doença pôs termo à sua actividade como observador.

Otto Struve, seu filho e sucessor na direcção do Observatório Central de Poulkova, pretendeu completar o trabalho, fazendo as observações dos anos 1858 e 1859.

Os trabalhos que a seguir se executaram no mesmo aparelho foram os do primeiro director do Observatório Astronómico de Lisboa (Tapada da Ajuda), Frederico Augusto Oom, que em missão oficial estava em Poulkova aperfeiçoando-se nos trabalhos de astronomia prática. As óptimas condições que o nosso observatório apresentava para abservar α da Lyra tinha determinado a encomenda de um aparelho semelhante ao de Poulkova e justificava o interêsse manifestado pelo ilustre astrónomo português por essas observações.

No volume III das observações de Poulkova são publicados os resultados das observações de W. Struve, de O. Struve e de F. Oom, tendo estas últimas sido executadas com o fim de determinar as distâncias zenitais de

tôdas as estrêlas da Revisão Celeste de Bonne, que, com grandeza superior à 7.ª, passassem no meridiano de Poulkova a uma distância zenital inferior a 1°.

Foi talvez então que nasceu na espírito do director do Observatório da Tapada a ideia de inverter a luneta durante a observação da passagem meridiana de cada estrêla, dando lugar a que por proposta sua, a casa Repsold instalasse aparelhos de inversão rápida em alguns dos instrumentos que foram encomendados para as observações meridianas e a que, em Portugal, se viesse, desde 1881, usando nas observações um sistema de trabalho que num congresso recente de astronomia foi aconselhado a todos os observadores.

* * *

Foi por indicação do terceiro e muito ilustre director do Observatório Astronómico de Lisboa, o saudoso astrónomo Frederico Oom, recentemente falecido, que nos ocupámos da observação de passagens de estrêlas no primeiro vertical.

O valor scientífico destas observações é grande pois que permitem deduzir com grande rigor as variações das distâncias zenitais de estrêlas que culminem próximo do zénite.

Dispõe o Observatório Astronómico da Tapada de um aparelho próprio para estes trabalhos e de lamentar é que a falta de pessoal, tenha dado lugar a que a primeira série completa de observações do período do nodo lunar tenha sido feita no Observatório Naval de Washington e não no de Lisboa.

Na determinação da latitude astronómica do ponto-origem da triangulação geodésica portuguesa (Castelo de S. Jorge, Lisboa) fizeram-se observações de passagens no 1.º vertical e talvez que convenha ainda recorrer a estes métodos em alguns trabalhos de astronomia geodésica. As missões portuguesas de cartografia e de delimitação de fronteiras têm usado exclusivamente os métodos de observação no meridiano e o mesmo acontece nos trabalhos da United States Coast and Geodetic Survey onde quási ùnicamente se usa o método de Talcott. Apesar de se reconhecer ali a grande precisão dos resultados, que se deduzem das observações feitas no primeiro vertical, considera-se êste processo pouco prático, para as determinações de campo, em virtude das estrêlas se poderem encobrir entre as duas passagens leste e oeste.

Ora os aparelhos cujos limbos zenitais se destinam ùnicamente a efectuar a pontaria em altura e que não têm micrómetro e nível de Talcott têm condições suficientes para as determinações de longitude e só podem servir, pràticamente, nas determinações de latitude recorrendo a observações de passagens no primeiro vertical; por outro lado é quási sempre possível observar estrêlas que passem no primeiro vertical de oeste pouco depois de passarem no primeiro vertical de leste. Daí a convicção de que, mesmo em trabalhos de astronomia de campo, estes métodos podem prestar grandes serviços.

Outubro de 1930.

Introdução

1 — As trajectórias aparentes das estrelas, observadas no primeiro vertical, não são paralelas aos fios horisontais do retículo, como pràcticamente acontece nas passagens meridianas.

Desprezando a curvatura da parte da trajectória, descrita pela estrêla sobre o retículo, pode afirmar-se que:

a) a trajectória de uma estrêla equatorial faz com os fios horizontais um ângulo de $90° - \varphi$ sendo φ a latitude do lugar de observação;

b) as trajectórias das estrêlas são tanto mais inclinadas em relação a esses fios do retículo quanto maiores são as declinações;

c) as estrêlas cuja declinação é φ cortam normalmente os mesmos fios.

Só podem observar-se no primeiro vertical estrêlas de declinações compreendidas entre zero e φ.

A hora da passagem de uma estrêla no 1.º vertical assim como a sua altura nesse instante podem deduzir-se fàcilmente partindo do valor da latitude do lugar de observação.

Do triângulo esférico rectângulo cujos vértices são o polo, o zenite e a estrêla conclue-se, com efeito, que:

$$\cos t = \frac{\operatorname{tg} \delta}{\operatorname{tg} \varphi} \quad \ldots \ (1)$$

$$\cos z = \frac{\operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \varphi} \quad \ldots \ (2)$$

designando t, δ e z o ângulo horario, a declinação e a distância zenital da estrêla.

Sendo α a sua ascensão recta e θ o tempo sideral, a relação:

$$\theta = \alpha + t \quad \ldots \ (3)$$

permite calcular a hora sideral da passagem.

Para as passagens no primeiro vertical de leste deve tomar-se para valor de t (em graus) a diferença entre 360° e o ângulo do primeiro quadrante cujo coseno é tg δ cotg φ e para as passagens no primeiro vertical de oeste deve tomar-se para t o próprio valor dêste ângulo.

Supomos, como se vê, que o ângulo horário é contado a partir do ponto sul do equador e que varia de 0 a 360° crescendo no sentido do movimento dos ponteiros de um relógio.

As fórmulas (1) (2) e (3) permitem portanto, conhecido φ, organizar uma lista de estrêlas que contenha as indicações necessárias para observar as suas passagens no primeiro vertical.

Um valor aproximado da latitude é suficiente para deduzir os elementos necessários para a observação.

Se a declinação da estrêla difere muito pouco da latitude do lugar, a aplicação do cálculo por logaritmos às fórmulas (1) e (2) não conduz a valores suficientemente exactos de z e t.

Da expressão de cos z conclue-se porém que:

$$\operatorname{sen}^2 z = \frac{\operatorname{sen}^2\varphi - \operatorname{sen}^2\delta}{\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\,(1-\operatorname{sen}^2\delta) - (1-\operatorname{sen}^2\varphi)\operatorname{sen}^2\delta}{\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^2\varphi\cos^2\delta - \cos^2\varphi\operatorname{sen}^2\delta}{\operatorname{sen}^2\varphi}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(\varphi+\delta)\operatorname{sen}(\varphi-\delta)}{\operatorname{sen}^2\varphi}$$

será portanto:

$$\operatorname{sen} z = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(\varphi+\delta)\operatorname{sen}(\varphi-\delta)}}{\operatorname{sen}\varphi}$$

Do triângulo esférico já considerado vem:

$$\operatorname{sen} z = \cos\delta\operatorname{sen} t$$

e portanto:

$$\operatorname{sen} t = \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(\varphi+\delta)\operatorname{sen}(\varphi-\delta)}}{\cos\delta\operatorname{sen}\varphi}$$

Estas expressões, sendo também logarítmicas, já não apresentam os inconvenientes que tinham as fórmulas (1) e (2) e devem, por isso empregar-se quando as estrêlas passam, no 1.° vertical, muito próximas do zenite, isto é, quando $\varphi - \delta$ é muito pequeno.

2 — Para preparar as observações, convém, muitas vezes, determinar prèviamente as estrêlas que teem a sua passagem numa dada hora.

Quando para a latitude do lugar de observação não está organizada uma tabela análoga à que apresentamos no final deste trabalho esse problema pode resolver-se, pràticamente, marcando sôbre a carta celeste a posição que tem o 1.º vertical quando a hora é a da observação.

Se a carta celeste de que se dispõe é uma projecção estereográfica, feita sôbre o equador, a projecção do primeiro vertical é, como se sabe, um arco de circulo cujo centro é a projecção do ponto do infinito da direcção das geratrizes da superficie cilíndrica que é tangente à esfera ao longo do primeiro vertical.

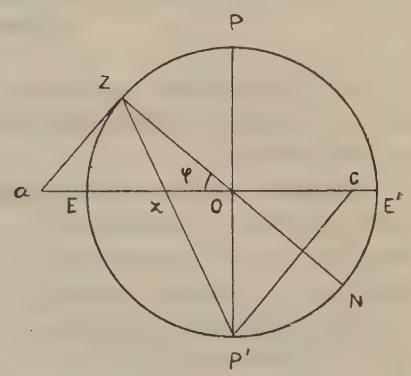
Então a projeção o do polo dista R tg φ do centro c dêsse arco (designando R o comprimento que representa o raio da esfera) e dista da projecção z do zenite:

$$\overline{oz} = \overline{oa} - \overline{za}$$

$$= \overline{oa} - \overline{aZ}$$

$$= \frac{R}{\cos \varphi} - R \operatorname{tg} \varphi$$

$$= R\left(\frac{1 - \operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi}\right)$$



Para determinarmos as estrêlas que a uma dada hora sideral θ estão no 1.º vertical deve então marcar-se na carta celeste o ponto z em que o paralelo de declinação φ encontra o circulo horário das θ horas, unir-se êsse ponto com o e marcar-se a partir de z e no sentido zo um comprimento:

$$\overline{zc} = \frac{R}{\cos \varphi}$$

O arco de círculo de centro c e raio cz é a projecção do 1.º vertical no instante considerado.

Em qualquer outro instante a posição dêste círculo máximo obtem-se rodando com zc em tôrno de o, sendo por isso prático colocar sôbre a carta uma folha de papel transparente em que se tenha traçado o arco de círculo que representa o 1.º vertical para a latitude da estação de observação.

3 — Se a instalação do aparelho fôsse tão perfeita que o eixo ótico da luneta estivesse rigorosamente no primeiro vertical e se, com precisão, estivesse determinado o tempo, as fórmulas (1) e (3) permitiriam calcular a declinação da estrêla, se fôsse conhecido o valor exacto da latitude do lugar de observação, ou calcular esta latitude partindo do valor da declinação.

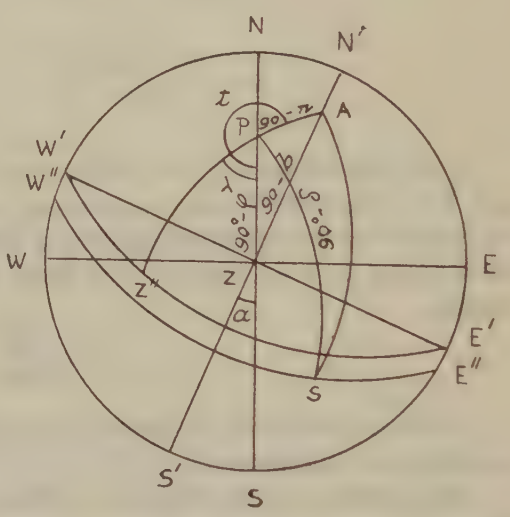
Há porém que atender aos erros instrumentais: o eixo de rotação da luneta não está rigorosamente horisontal nem é contido pelo plano do meridiano e o eixo ótico não está exactamente sôbre o plano de colimação.

As relações anteriores, sendo suficientes para preparar as observações, precisam por isso de ser substituídas por outras, que atendam a êsses erros, para se obterem na prática bons resultados.

Teoria do instrumento de passagens no primeiro vertical. Fórmulas gerais.

4 — Suponhamos que o plano da figura é o plano do horizonte, e que NS e WE são as intersecções dêste plano com o meridiano e com o primeiro vertical.

Supondo que o eixo de rotação da luneta não coïncide com NS, designemos por *a* o azímute do eixo de rotação, contado positivamente quando o extremo norte está a este do meridiano, e por *b* a inclinação do eixo de rotação sôbre o horizonte, contada positivamente quando o extremo norte está acima do horisonte. O círculo máximo descrito pelo eixo de colimação da luneta, no seu movimento em tôrno do eixo dos munhões, terá então por projecção estereográfica o arco W′E′ sendo AZ″ igual a 90°.



Supondo ainda que o eixo de colimação não coïncide com o eixo ótico, designemos por *c* o ângulo dêstes eixos contado positivamente quando o cruzamento dos fios (que determina o eixo ótico) está a norte do eixo de colimação.

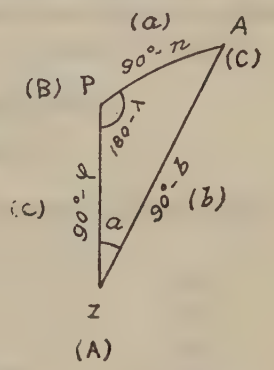
O eixo ótico da luneta estará então sôbre uma superfície cónica que intercepta a esfera celeste segundo o círculo menor cuja projecção é W''E''.

As grandezas *a*, *b* e *c*, chamaremos respectivamente erros de azímute, de nível e de colimação do instrumento. No caso representado na figura estes três erros são positivos.

Ao círculo máximo Z''PA que contém o polo e o ponto A, em que o eixo do instrumento corta a esfera celeste, chamaremos meridiano do instrumento; ao círculo máximo W'Z''E' chamaremos primeiro vertical do instrumento e ao ponto Z'' chamaremos zenite do instrumento.

Posto isto apliquemos ao triângulo esférico ZPA as fórmulas da trigonometria esférica:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\operatorname{sen} a \cos B = \operatorname{sen} c \cos b - \operatorname{sen} b \cos c \cos A$$
$$\operatorname{sen} a \operatorname{sen} B = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} A$$

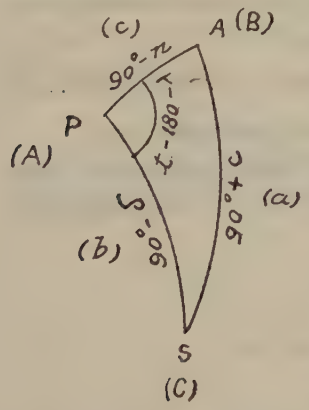


Teremos:

$$\operatorname{sen} n = \operatorname{sen} b \operatorname{sen} \varphi + \cos b \cos \varphi \cos a$$
$$-\cos n \cos \lambda = \cos \varphi \operatorname{sen} b - \cos b \operatorname{sen} \varphi \cos a \quad \ldots(3)$$
$$\cos n \operatorname{sen} \lambda = \cos b \operatorname{sen} a$$

onde *a* e *b* são os êrros instrumentais de azímute e de nível, φ é a latitude do lugar de observação, suposta positiva quando norte, n é a declinação do ponto A e λ é o ângulo horário do meridiano do instrumento.(1)

Ao ângulo λ dá-se, por vezes, o nome de longitude do meridiano do instrumento.



Suponhamos que s é a posição da estrêla quando é observada no instrumento que consideramos, e apliquemos a primeira das anteriores fórmulas de trigonometria ao triângulo SPA:

Vem:

$$\operatorname{sen} c = \operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \cos n \cos \delta \cos (t - \lambda) \quad \ldots (4)$$

onde c é o êrro de colimação do instrumento.

A fórmula (4) continua a subsistir quando se trata de uma passagem E.

As igualdades (3) e (4) são as fórmulas gerais que relacionam as coordenadas da estrêla com os êrros instrumentais e com as coordena-

(1) Quando *a* fôr negativo, o ângulo em P é $\lambda - 180°$ mas as fórmulas (3) continuam a verificar-se como se reconhece imediatamente.

das do local de observação, e correspondem a quatro expressões gerais que aparecem analogamente na teoria das passagens meridianas.

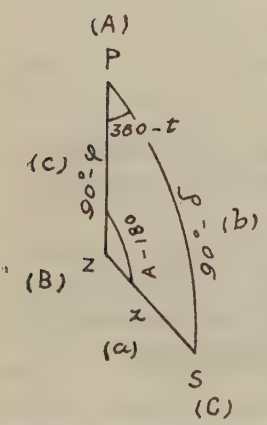
É necessário, como então acontecia, transformar as fórmulas (3) e (4) para as apropriar ao cálculo das observações.

Transformação das fórmulas anteriores.
Instalação do instrumento
e determinação dos êrros instrumentais.

5 — Desenvolvendo cos (t — λ) em (4), substituindo na expressão obtida sen n, cos n cos λ e cos n sen λ pelos seus valores, dados por (3), e, finalmente, substituindo sen *a*, sen *b* e sen *c* por *a*, *b* e *c* e cos *a*, cos *b* e cos *c* por 1, vem:

$$c = \cos\varphi \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \cos t + a \cos\delta \operatorname{sen} t - \\ - b\,[\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t]$$

Do triângulo esférico PZS, resultam as igualdades:



$$\cos z = \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$

$$\operatorname{sen} z \operatorname{sen} A = \cos\delta \operatorname{sen} t$$

ou visto que A, quando a estrêla está a leste do meridiano, é proximamente 270°:

$$\cos\delta \operatorname{sen} t = -\operatorname{sen} z \quad \ldots(5)$$

A expressão que dá *c* pode então escrever-se pràticamente:

$$c + b\cos z + a \operatorname{sen} z = -\cos\varphi \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \cos t \quad \ldots(6)$$

quando a estrêla está na sua passagem leste.

Designemos agora por Θ o tempo sideral da passagem da estrêla no 1.º vertical e por α a sua ascensão recta. Sendo 90° o ângulo em z, teremos:

$$\cos t = \operatorname{cotg}\varphi \operatorname{tg}\delta$$

ou:

$$-\cos\varphi \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \cos(\Theta - \alpha) = 0$$

igualdade que somada com (6) dá:

$$c + b\cos z + a \operatorname{sen} z = -2 \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}[t - (\Theta - \alpha)] \operatorname{sen}\tfrac{1}{2}[t + (\Theta - \alpha)] \quad \ldots(7)$$

Representando por θ o tempo sideral da passagem, dado pelo cronómetro, e por $\Delta\theta$ a sua correção será:

$$t = \theta + \Delta\theta - \alpha$$

O valor de t, em virtude de serem pequenos os erros instrumentais, difere pouco de $\Theta - \alpha$ e por isso pode substituir-se $\operatorname{sen}\frac{1}{2}[t + \Theta - \alpha]$ por $\operatorname{sen} t$ e $\operatorname{sen}\frac{1}{2}[t - (\Theta - \alpha)]$ por $-\frac{1}{2}[\Theta - t - \alpha]$, o que transforma (7) em:

$$c + b\cos z + a\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}\varphi\cos\delta\operatorname{sen} t\,[\Theta - \alpha - t]$$

ou, atendendo a (5):

$$\Theta = \theta + \Delta\theta - \frac{a}{\operatorname{sen}\varphi} - \frac{b}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{tg} z} - \frac{c}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} z}$$

ou, fazendo:

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} = A'$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{tg} z} = B' \quad \ldots (8)$$

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} z} = C'$$

$$\Theta = \theta + \Delta\theta + A'a + B'b + C'c \quad \ldots (9)$$

fórmula semelhante à que se usa nas passagens meridianas.

O raciocínio que acabamos de fazer subsiste para as passagens oeste. Entre a declinação, o ângulo horário e a distância zenital da estrêla existe, porém, a relação:

$$\cos\delta\operatorname{sen} t = \operatorname{sen} z$$

que deve substituir no desenvolvimento a fórmula (5) e conduz também a (9) sendo:

$$-\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi} = A'$$

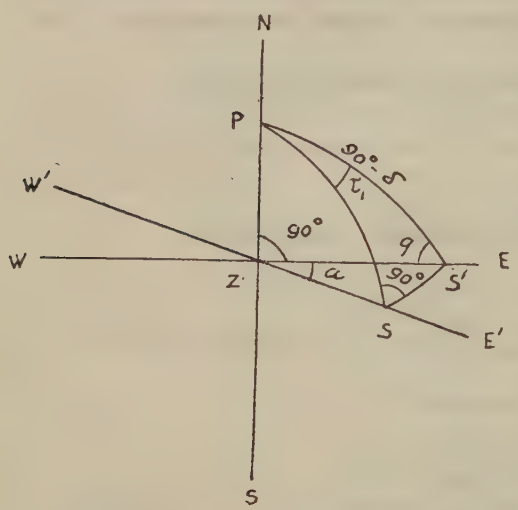
$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{tg} z} = B'$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen} z} = C'$$

6. — A fórmula (9) pode deduzir-se directamente, atendendo a que o efeito dos erros instrumentais *a*, *b* e *c*, que supomos muito pequenos, é a soma dos efeitos que cada um deles determinaria actuando isoladamente.

Esta forma de proceder tem a vantagem de explicar, com mais clareza, as leis que regulam a influência que tem cada um dos erros sôbre as observações e em particular de justificar o efeito constante do êrro de azímute qualquer que seja a declinação da estrêla observada.

Suponhamos primeiro que só há êrro de azímute. No caso da figura êste êrro é positivo e, como se conclue imediatamente, quer na passagem E, quer na passagem W, a estrêla é observada depois de passar no 1.º vertical; a correcção a fazer no tempo da passagem é então negativa.



Se o êrro de azímute *a* fôsse negativo a correcção seria positiva para qualquer das passagens.

Para deduzirmos o valor desta correção, que designaremos por τ_1, consideremos o triângulo esférico PSS′ em que S é a posição em que a estrêla é observada e S′ a posição em que seria observada se não houvesse êrro de azímute. O ângulo em P, que designaremos por τ_1 é o valor absoluto da correcção que se pretende calcular.

Em virtude do êrro *a* ser muito pequeno, suporemos que o arco de círculo máximo SS′ se confunde com o paralelo da estrêla e teremos portanto:

$$\operatorname{sen} \tau_1 = \frac{\operatorname{sen} \widehat{SS'}}{\cos \delta}$$

Do triângulo SS′Z conclue-se também que:

$$\frac{\operatorname{sen} \widehat{SS'}}{\operatorname{sen} a} = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos q}$$

sendo q o ângulo paralático da estrêla.

As duas expressões anteriores permitem escrever, atendendo a que *a* e τ_1 são muito pequenos:

$$\tau_1 = a \frac{\operatorname{sen} z}{\cos q \cos \delta}$$

E como do triângulo rectangulo PS′Z se conclue que:

$$\cos \delta \cos q = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} z$$

será:

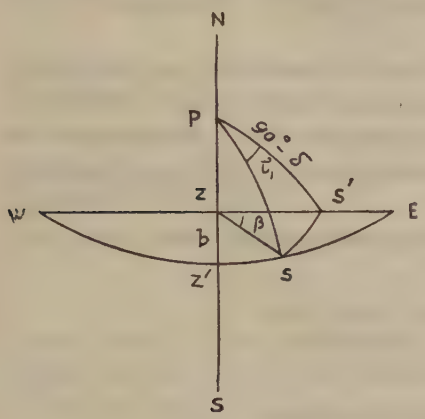
$$\tau_1 = \frac{a}{\operatorname{sen} \varphi}$$

A correcção τ tem sempre o signal contrário de a e portanto:

$$\tau_1 = -\frac{a}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Suponhamos agora que só há êrro de nível.

O eixo ótico da luneta encontra a esfera celeste num ponto do arco de circulo máximo WZ'E.



Designando por β o ângulo SZS', teremos anàlogamente:

$$\tau_1 = \frac{\beta}{\operatorname{sen} \varphi}$$

Mas, do triângulo rectângulo ZZ'S, onde o lado ZZ' é o êrro de nível b, conclue-se que:

$$\operatorname{sen} \beta = \operatorname{tg} b \operatorname{cotg} z$$

Atendendo a que β e b são muito pequenos, ter-se-há:

$$\tau_1 = \frac{b}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} z}$$

No caso da figura b é positivo e para obter o tempo da passagem no 1.° vertical dever-se há subtraír ou somar τ_1 ao tempo observado numa passagem conforme ela fôr E ou W; se b fôsse negativo dar-se-ia o contrário.

A correcção a fazer no tempo observado será então em grandeza e sinal.

$$\tau_1 = -\frac{b}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} z} \text{ para as passagens E}$$

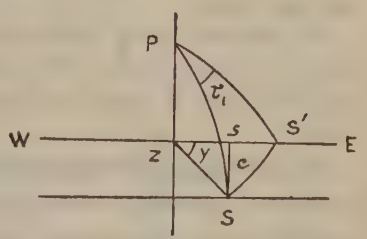
$$\tau_1 = \frac{b}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} z} \text{ para as passagens W}$$

Suponhamos finalmente que só há êrro de colimação.

Teremos ainda:

$$\tau_1 = \frac{\gamma}{\operatorname{sen} \varphi}$$

e, considerando o triângulo SZs em que o lado $\widehat{Ss}$, pràticamente igual ao êrro de colimação c, é um arco de círculo máximo tirado por S perpendicularmente ao primeiro vertical, teremos:



$$\cos c = \operatorname{sen} \gamma \operatorname{sen} z$$

e portanto:

$$\tau_1 = \frac{c}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} z}$$

A correcção a fazer ao tempo observado será:

$$\tau_l = -\frac{c}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} z} \text{ para as passagens E}$$

$$\tau_l = \frac{c}{\operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen} z} \text{ para as passagens W}$$

7. As equações da forma (9), que se deduzem das observações de passagens de estrêlas no 1.º vertical, podem ser tratadas como as que se deduzem aplicando a fórmula de Mayer às observações de passagens meridianas.

No nosso caso porém o coeficiente de a é constante e por isso a correcção $\Delta\theta$ da pêndula só pode ser deduzida desde que se conheça o valor do êrro instrumental de azímute; por sua vez, a determinação do valor a dêste êrro, feita a partir das observações, exige o conhecimento de $\Delta\theta$.

Observando as passagens E e W, da mesma estrêla sôbre um fio, ter-se-há:

$$\Theta_l = \theta_l + \Delta\theta_l + A'a + B'_l b_l + C_l' c$$

para a passagem E, e

$$\Theta_2 = \theta_2 + \Delta\theta_2 + A'a - B_l' b_2 - C_l' c$$

para a passagem W.

Subtraindo, membro a membro, as duas igualdades obter-se-há o valor da colimação do fio considerado.

Com efeito Θ_l e Θ_2 podem calcular-se desde que se conheça a latitude da estação de observação, $\theta_2 - \theta_l$ é o tempo (do cronómetro) decorrido entre as duas observações, $\Delta\theta_2 - \Delta\theta_l = (\theta_2 - \theta_l)\,\partial\theta$ fica determinado desde que se conheça a marcha $\partial\theta$ do cronómetro e b_l e b_2 deduzem-se das leituras do nível.

O cálculo de c, assim feito, bem como todos os outros cálculos em que se parte da aplicação da fórmula (9) podem ser simplificados pelo uso da tabela que a seguir apresentamos.

Na instalação do instrumento no 1.º vertical e em particular quando se trate de operações de astronomia geodésica a fórmula (9) torna possível a aplicação de um método semelhante ao que se usa para fazer a colocação do instrumento no meridiano e que consiste em deduzir sucessivamente valores de a e corrigir, tendo em atenção êsses valores, a posição azimutal do instrumento.

Para observar os tempos das passagens com maior precisão convirá usar estrêlas baixas.

Para ser desprezível o efeito dos êrros de nível e de colimação pode deduzir-se o valor de a das duas passagens E e W da mesma estrêla ou das passagens de duas estrêlas escolhidas por forma que uma passe no 1.º vertical de oeste pròximamente à mesma distância do zenite a que a outra passa no 1.º vertical de leste.

Ter-se-há então para a 1.ª estrêla:

$$\Theta_1 = \theta_1 + \Delta\theta_1 + A'a + B'_1 b_1 + C'_1 c$$

e para a 2.ª:

$$\Theta_2 = \theta_2 + \Delta\theta_2 + A'a + B'_2 b_2 + C'_2 c$$

sendo aproximadamente:

$$B'_1 + B'_2 = 0$$

$$C'_1 + C'_2 = 0$$

e como muito aproximadamente é $b_1 = b_2$, a média dos dois valores obtidos para $\Delta\theta_1 + A'a$ virá isenta dos efeitos dos êrros b e c.

A determinação de a exige, como já se tinha afirmado, o conhecimento da correcção do cronómetro.

TABELA I

Determinação dos valores dos coeficientes A', B' e C' da fórmula (9)

$$A' = -\frac{1}{\operatorname{sen}\varphi}$$

$$B' = \pm A'\,\frac{1}{\operatorname{tg} z} = \pm A'B'' \qquad C' = \pm A'\,\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \pm A'\,C''$$

Para Lisboa: $\varphi = +38^\circ\,43'$ $A' = -1{,}60$

z	$B'' = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$	$C'' = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$	z	$B'' = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$	$C'' = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$
90° 00′	0 00	1.00	86° 00′	0.07	1.00
89° 30′	0,01	1.00	85° 30′	0,08	1.00
89° 00′	0,02	1.00	85° 00′	0,09	1.00
88° 30′	0,03	1.00	84° 30′	0,10	1.01
88° 00′	0,04	1.00	84° 00′	0,10	1.01
87° 30′	0 04	1.00	83° 30′	0,11	1.01
87° 00′	0.05	1.00	83° 00′	0,12	1.01
86° 30′	0,06	1.00	82° 30′	0,13	1.01

z	$B'' = \frac{1}{\text{tg } z}$	$C'' = \frac{1}{\text{sen } z}$
82° 00′	0,14	1.01
81° 30′	0,15	1.01
81° 00′	0 16	1.01
80° 30′	0,17	1.01
80° 00′	0,18	1.02
79° 30′	0,18	1 02
79° 00′	0,19	1.02
78° 30′	0,20	1.02
78° 00′	0 21	1.02
77° 30′	0,22	1.02
77° 00′	0 23	1.03
76° 30′	0,24	1.03
76° 00′	0,25	1 03
75° 30′	0.26	1.03
75° 00′	0,27	1 04
74° 30′	0.28	1.04
74° 00′	0 29	1.04
73° 30′	0 29	1 04
73° 00′	0.30	1.05
72° 30′	0.31	1 05
72° 00′	0 32	1.05
71° 30′	0.33	1.05
71° 00′	0.34	1.06
70° 30′	0,35	1.06
70° 00′	0,36	1.06
69° 30′	0 37	1 07
69° 00′	0 38	1.07
68° 30′	0,39	1.07
68° 00′	0,40	1 08
67° 30′	0,41	1 08
67° 00′	0 42	1.08
66° 30′	0,43	1.09
66° 00′	0,44	1.09
65° 30′	0,46	1.09
65° 00′	0,47	1.10
64° 30′	0,48	1.10
64° 00′	0,49	1.11
63° 30′	0,50	1.11
63° 00′	0 51	1.12
62° 30′	0,52	1.12
62° 00′	0 53	1·13
61° 30′	0,54	1.13
61° 00′	0,55	1.14
60° 30′	0 57	1.14
60° 00′	0.58	1.15
59° 30′	0,59	1.15
59° 00′	0,60	1.16
58° 30′	0,61	1.17
58° 00′	0 62	1.18
57° 30′	0 64	1.18
57° 00′	0 65	1.19
56° 30′	0.66	1.20
56° 00′	0.68	1.21
55° 30′	0,69	1.21
55° 00′	0,70	1 22

z	$B'' = \frac{1}{\text{tg } z}$	$C'' = \frac{1}{\text{sen } z}$
54° 30′	0,71	1·23
54° 00′	0.73	1.24
53° 30′	0,74	1 24
53° 00′	0 75	1.25
52° 30′	0.77	1.26
52° 00′	0,78	1.27
51° 30′	0.80	1.28
51° 00′	0,81	1.29
50° 30′	0,82	1.30
50° 00′	0 84	1·31
49° 30′	0 85	1 31
49° 00′	0,87	1.32
48° 30′	0,88	1.33
48° 00′	0.90	1 35
47° 30′	0,92	1.36
47° 00′	0,93	1.37
46° 30′	0 95	1.38
46° 00′	0 97	1.39
45° 30′	0.98	1.40
45° 00′	1,00	1.41
44° 30′	1,02	1 43
44° 00′	1 04	1.44
43° 30′	1,05	1.45
43° 00′	1.07	1.47
42° 30′	1,09	1.48
42° 00′	1,11	1 49
41° 30′	1 13	1 50
41° 00′	1.15	1.52
40° 30′	1,17	1 53
40° 00′	1,19	1.56
39° 30′	1,21	1.57
39° 00′	1.23	1.59
38° 30′	1.25	1.60
38° 00′	1.28	1 62
37° 30′	1,30	1.64
37° 00′	1.33	1 66
36° 30′	1.35	1.68
36° 00′	1,38	1.70
35° 30′	1.40	1.72
35° 00′	1,43	1.74
34° 30′	1,45	1.76
34° 00′	1,48	1 79
33° 30′	1,51	1.81
33° 00′	1,54	1.84
32° 30′	1,57	1.86
32° 00′	1 60	1.89
31° 30′	1.63	1 91
31° 00′	1.66	1.94
30° 30′	1.70	1.97
30° 00′	1,73	2 00
29° 30′	1.77	2.03
29° 00′	1,80	2 06
28° 30′	1,84	2 10
28° 00′	1.88	2.13
27° 30′	1,92	2 17

z	$B'' = \frac{1}{\text{tg } z}$	$C'' = \frac{1}{\text{sen } z}$
27° 00′	1,96	2.20
26° 30′	2,01	2 24
26° 00′	2,05	2.28
25° 30′	2,10	2 32
25° 00′	2,14	2.37
24° 30′	2,19	2.41
24° 00′	2,25	2'46
23° 30′	2 30	2.51
23° 00′	2,36	2.56
22° 30′	2,41	2.61
22° 00′	2,47	2.67
21° 30′	2,54	2.73
21° 00′	2,61	2.79
20° 30′	2,68	2.86
20° 00′	2,75	2.92
19° 30′	2,82	3.00
19° 00′	2,90	3.07
18° 30′	2,99	3.15
18° 00′	3,08	3.24
17° 30′	3,17	3.33
17° 00′	3,27	3.42
16° 30′	3,38	3.52
16° 00′	3,49	3.63
15° 30′	3,61	3.74
15° 00′	3,73	3 86
14° 30′	3,87	3 99
14° 00′	4,01	4.13
13° 30′	4,17	4.28

z	$B'' = \frac{1}{\text{tg } z}$	$C'' = \frac{1}{\text{sen } z}$
13° 00′	4,33	4 44
12° 30′	4,51	4.62
12° 00′	4,71	4.81
11° 30′	4,92	5.02
11° 00′	5,15	5.24
10° 30′	5,40	5.49
10° 00′	5,67	5 76
9° 30′	5,98	6.06
9° 00′	6,31	6.39
8° 30′	6,69	6.77
8° 00′	7,12	7.19
7° 30′	7,60	7 66
7° 00′	8,14	8.21
6° 30′	8,78	8.83
6° 00′	9,51	9.57
5° 30′	10,39	10.43
5° 00′	11,43	11.47
4° 30′	12,71	12.75
4° 00′	14.30	14.34
3° 30′	16,35	16.38
3° 00′	19,08	19.11
2° 30′	22,90	22.93
2° 00′	28,64	28.65
1° 30′	38,19	38.20
1° 00′	57,29	57.30
0° 30′	114,59	114 59
0° 00′	∞	∞

Nova transformação das fórmulas gerais. Determinação da latitude astronómica.

8 — Designemos por h e β um número positivo e um ângulo que satisfaçam as condições:

$$\left.\begin{aligned} h \operatorname{sen} \beta &= \operatorname{sen} b \\ h \cos \beta &= \operatorname{sen} b \cos a \end{aligned}\right\} \ldots (10)$$

As fórmulas gerais (3) podem escrever-se com a forma:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen} n &= h \cos(\varphi - \beta) \\ \cos n \cos \lambda &= h \operatorname{sen}(\varphi - \beta) \\ \cos n \operatorname{sen} \lambda &= \cos b \operatorname{sen} a \end{aligned}\right\} \ldots (10\,a)$$

Substituindo estes valores de sen α e de cos α em (4) vem:

$$\operatorname{sen} c = -h \cos(z-\beta) \operatorname{sen} \delta + h \cos \delta \operatorname{sen}(z-\beta) \frac{\cos(t-\lambda)}{\cos \lambda}$$

que, introduzindo as novas grandezas auxiliares h' e φ' definidas pelas igualdades:

$$h' \operatorname{sen} \varphi' = \operatorname{sen} \delta$$
$$h' \cos \varphi' = \cos \delta \frac{\cos(t-\lambda)}{\cos \lambda} \quad \ldots (11)$$

se reduz a:

$$\operatorname{sen} c = h\, h' \operatorname{sen}(z - \varphi' - \beta)$$

ou:

$$\operatorname{sen}(z - \varphi' - \beta) = \frac{\operatorname{sen} c}{h\, h'}$$

É fácil de ver que o ângulo $z - \varphi' - \beta$ é pequeno.

A colimação do fio mais afastado do fio do meio nunca é, com efeito, maior que 15'; no aparelho de que nos servimos não atinge sequer 10', para o fio mais afastado; o número h é praticamente a unidade. Pois que de (10) vem:

$$h^2 = 1 - \cos^2 b \operatorname{sen}^2 a;$$

O número h' nunca é muito pequeno. Com efeito, desprezando λ em (11), vem:

$$h'^2 = \operatorname{sen}^2 \delta + (1 - \operatorname{sen}^2 \delta) \cos^2 t = \operatorname{sen}^2 \delta (1 - \cos^2 t) + \cos^2 t$$

que dá praticamente $h' = 1$ para estrêlas que passam no primeiro vertical de W pouco depois de passarem no primeiro vertical de E (t aproximadamente nulo), conduzindo para $t = 45°$, que corresponde a um intervalo de 6 horas entre as duas passagens, a:

$$h'^2 = \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2 \delta + \frac{1}{2};$$

...

o mais pequeno valor de h' seria $\frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2}$.

O ângulo $\frac{c}{h\, h'}$ não chegará portanto a 30" e, sem êrro apreciável, pode escrever-se:

$$\varphi - \varphi' - \beta = c \frac{\operatorname{sen} z'}{\operatorname{sen} \delta} \quad \ldots (12)$$

As transformações, que fizemos, conduziram-nos a uma expressão própria para deduzir a latitude astronómica por observação de passagens no primeiro vertical.

Os ângulos auxiliares β e φ' que nela figuram são dados pelas fórmulas:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} b}{\cos a} \qquad \operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\beta\,\frac{\cos(t-\lambda)}{\cos\lambda} \quad \ldots (13)$$

podendo a primeira substituir-se por:

$$\beta = b$$

Observando as passagens E e W de uma estrêla no mesmo fio é fácil calcular a longitude λ do meridiano do instrumento.

Designando por $\Delta\vartheta$ e $\Delta\vartheta'$ as correcções do cronómetro, nos instantes ϑ e ϑ' das passagens, os ângulos horários da estrêla nesses instantes são:

$$t = \vartheta + \Delta\vartheta - \alpha$$

$$t' = \vartheta' + \Delta\vartheta' - \alpha$$

e o ângulo horário do meridiano do instrumento é evidentemente:

$$\lambda = \tfrac{1}{2}(t+t') = \tfrac{1}{2}(\vartheta+\vartheta') + \tfrac{1}{2}(\Delta\vartheta+\Delta\vartheta') - \alpha \quad \ldots (14)$$

Se designarmos por 2τ o tempo decorrido entre as duas passagens, será:

$$\tau = \frac{1}{2}(\vartheta'-\vartheta) - \tfrac{1}{2}(\Delta\vartheta'-\Delta\vartheta) \quad \ldots (15)$$

e:

$$t'-\lambda = \tau$$

As expressões (12) e (13) reduzem-se portanto a:

$$\varphi = \varphi' + b + \frac{c\,\operatorname{sen}\varphi'}{\operatorname{sen}\delta} \quad \ldots (16)$$

$$\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\delta\cos\lambda\sec\tau \quad \ldots (17)$$

sendo os valores de λ e τ dados por (14) e (15).

9 — O cálculo de φ pode ser feito desprezando em (17) o factor $\cos\lambda$, que é pràticamente constante para uma série de observações, e corrigindo

depois o resultado obtido do efeito de se ter desprezado êsse actor.

Começa-se então por calcular φ_1 pela expressão:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \delta \sec \tau$$

e ter-se há evidentemente:

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi_1 \cos \lambda$$

onde λ é um ângulo muito pequeno.

Da igualdade anterior conclue-se que:

$$\operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi') = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1 (1 - \cos \lambda)}{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi_1 \cos \lambda}$$

Fazendo:

$$\operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} \lambda = \frac{1 - \cos \lambda}{1 + \cos \lambda} = x$$

teremos:

$$\cos \lambda = \frac{1 - x}{1 + x}$$

e:

$$\operatorname{tg} (\varphi_1 - \varphi') = \frac{2 x \operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_1}{(1 + x) \cos^2 \varphi_1 + (1 - x) \operatorname{sen}^2 \varphi_1}$$

ou:

$$\varphi_1 - \varphi' = \operatorname{arc\,tg} \frac{x \operatorname{sen} 2 \varphi_1}{1 + x \cos 2 \varphi_1}$$

Desenvolvendo segundo a fórmula de Mac-Laurin teremos:

$$\varphi_1 - \varphi' = \operatorname{tg}^2 \frac{\lambda}{2} \operatorname{sen} 2 \varphi_1 - \operatorname{tg}^4 \frac{\lambda}{2} \operatorname{sen} 4 \varphi_1 + \ldots$$

ou, com suficiente rigor:

$$\varphi_1 - \varphi' = \frac{\lambda^2}{4} \operatorname{sen} 2 \varphi_1$$

e portanto, passando para segundos de arco:

$$\varphi' = \varphi_1 - \frac{\lambda^2}{4} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2 \varphi_1$$

Ao valor de φ_1 deduzido é preciso juntar a correcção constante $-\frac{\lambda^2}{4} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2 \varphi_1$ cujo valor é, sem êrro apreciável:

$$-\frac{\lambda^2}{4} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2 \varphi$$

Para fazer êste cálculo é suficiente partir de um valor aproximado de z.

Sendo muito pequenos os êrros instrumentais a terceira fórmula (3) pode escrever-se:

$$a = \lambda \operatorname{sen} z$$

atendendo a que, aproximadamente:

$$a = 90^{p} - z$$

A correção a introduzir no valor da latitude, quando o cálculo se faz como indicámos, é:

$$-\frac{a^2}{2} \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg} z$$

O conhecimento do êrro de azimute dispensa que se use (14) para o cálculo de λ.

Determinação da latitude observando passagens de estrêlas no primeiro vertical. (Método de Bessel)

11 — Como veremos em breve, pode reduzir-se muito o efeito dos erros instrumentais observando as passagens E e W das mesmas estrelas; êsse procedimento não pode algumas vezes ser seguido quando se dispõe de pouco tempo para fazer as observações visto que só por um acaso feliz se poderão observar as duas passagens de uma estrela, de grandeza conveniente, dentro de um intervalo de tempo pequeno.

Por isso pode ser muito vantajoso o emprêgo do método, que vamos referir, em que se observam as passagens de estrelas independentemente da possibilidade de as observar nas suas posições simétricas em relação ao meridiano.

Designando por c o êrro de colimação do fio do meio (ou da média dos fios) e por i o intervalo equatorial que separa êste fio de um outro sôbre o qual se observou a passagem de uma estrela de declinação δ, ter-se-há, sendo τ o ângulo horário da estrela nesse instante e atendendo a que $c + i$ é sempre muito pequeno: [4]

$$c + i = -\operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \cos n \cos \delta \cos (\tau - \lambda) \quad \ldots \quad (18)$$

Nesta expressão, como se sabe, λ é o ângulo horário do meridiano do instrumento e n a declinação do ponto em que o extremo norte do eixo de rotação da luneta corta a esfera celeste.

O cálculo de latitude faz-se substituindo os valores de *sen n*, *cos n cos* λ e de *cos n sen* λ, dados pelas formulas (3), nas expressões análogas à anterior, que resultam das observações feitas nos diferentes fios e transformando convenientemente os resultados obtidos de modo a obter um sistema de equações que permitam deduzir simultâneamente φ, *a e c.*

É preferível porém, substituir neste cálculo as expressões análogas a (18), que se deduzem das observações de passagens da mesma estrela sôbre os diferentes fios, pela sua média aritmética.

Sendo q o número de fios observados, a média das equações é:

$$c + \frac{1}{q}\sum i = -\operatorname{sen} n \operatorname{sen}\delta + \cos n \cos\delta \frac{1}{q}\sum \cos(\tau - \lambda) \quad \ldots (19)$$

Para darmos outra forma a esta expressão calculemos

$$\frac{1}{q}\sum \cos(\tau - \lambda)$$

Designando por θ a média dos tempos observados nas passagens e por $\Delta\theta$ a correcção do cronómetro, o ângulo horário t da estrela, no instante em que o cronómetro marcou θ horas, era:

$$t = \theta + \Delta\theta - \alpha$$

Representando por I a diferença entre θ e o tempo da passagem sôbre um dos fios, o ângulo horário τ da estrela no instante da passagem sôbre esse fio era:

$$\tau = \theta - I + \theta\Delta - \alpha = t - I$$

e portanto

$$\frac{1}{q}\sum \cos(\tau - \lambda) = \frac{1}{q}\cos(t - \lambda)\sum \cos I + \frac{1}{q}\operatorname{sen}(t - \lambda)\sum \operatorname{sen} I$$

Sendo k e N um número e um ângulo determinados pelas condições:

$$\frac{1}{k}\cos N = \frac{1}{q}\sum \cos I$$

$$\frac{1}{k}\operatorname{sen} N = -\frac{1}{q}\sum \operatorname{sen} I \qquad (20)$$

ter-se-há:

$$\frac{1}{q}\sum \cos(\tau - \lambda) = \frac{1}{k}\cos(\tau - \lambda + N)$$

e, fazendo:

$$t_1 = t + N$$

ou o que é o mesmo:

$$t_i = \theta + N + \Delta\theta - \alpha \quad \ldots (21)$$

ter-se-há:

$$\frac{1}{q}\Sigma \cos (\tau - \lambda) = \frac{1}{k}\cos (t_i - \lambda)$$

e portanto, fazendo:

$$\frac{1}{q}\Sigma i = i_o \quad \ldots (22)$$

a expressão (18) toma a forma:

$$c + i_o = -\operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \frac{\cos n \cos \delta \cos (t_i - \lambda)}{k} \quad \ldots (23)$$

A formação da média das q expressões análogas a (18) exige o cálculo das grandezas auxiliares k e N o que se pode fazer comodamente usando tabelas.

As expressões (22) podem, com efeito, escrever-se:

$$\frac{1}{k}\cos N = 1 - \frac{1}{q}\Sigma 2 \operatorname{sen}^2 \frac{I}{2}$$

$$\frac{1}{k}\operatorname{sen} N = \frac{1}{q}\Sigma (I - \operatorname{sen} I)$$

visto que $\Sigma I = o$.

E como $I - \operatorname{sen} I$ é da ordem de I^3 e portanto muito pequeno, sendo também muito pequeno o termo $\frac{1}{q}\Sigma 2 \operatorname{sen}^2 \frac{I}{2}$, será N muito pequeno e k muito próximo de 1, podendo então escrever-se:

$$\frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{q}\Sigma 2 \operatorname{sen}^2 \frac{I}{2}$$

$$N = \frac{1}{q}\Sigma (I - \operatorname{sen} I)$$

e portanto:

$$\log k = -\log \frac{1}{k} = M \left[\frac{1}{q}\Sigma 2 \operatorname{sen}^2 \frac{I}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{q}\Sigma 2 \operatorname{sen}^2 \frac{I}{2}\right)^2 + \ldots \right]$$

onde:

$$M = \log_{10} e = 0,43429448\ldots$$

O segundo termo do desenvolvimento é quási inapreciável podendo por isso escrever-se:

$$\log k = \frac{1}{q}\Sigma 2 M \operatorname{sen}^2 \frac{I}{2} + \frac{(\log k)^2}{2M}$$

onde (log k) representa a primeira aproximação do valor de log k que se obtém tomando, ùnicamente, o primeiro termo do desenvolvimento em série.

A tabela II dá para cada valor de I o valor de $2\,M\,\text{sen}^2\frac{I}{2}$; a média dos q valores deduzidos é portanto o primeiro termo da expressão de log k, ou, o que é o mesmo, o valor de (log k).

A tabela III dá os valores de $\frac{(\log k)^2}{2\,M}$ e permite, portanto, determinar o 2.º termo da expressão de log k.

A tabela II dá também para cada valor de I os valores de I — sen I, em segundos de tempo, sendo portanto N a média dos valores deduzidos.

Convèm observar que a cada um dêstes valores se deve atribuir o signal de I.

Formada a igualdade (23) faça-se:

$$\frac{\cos\delta}{k} = \gamma\cos\delta_1$$
$$\text{sen}\,\delta = \gamma\,\text{sen}\,\delta_1 \qquad (24)$$

o que dá:

$$\frac{c + i_o}{\gamma} = -\,\text{sen}\,n\,\text{sen}\,\delta_1 + \cos n\cos\delta_1\cos(t_1 - \gamma) \quad \ldots\ (25)$$

Os valores de δ_1 e de γ, determinados por (24), podem ser calculados pelas expressões equivalentes:

$$\text{tg}\,\delta_1 = k\,\text{tg}\,\delta$$

$$\gamma = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{k}\right)\cos^2\delta}{\cos(\delta_1 - \delta)}$$

O valor de δ_1 é então muito próximo do de δ e o de γ é muito próximo da unidade.

Quando se observam as passagens em todos os fios i_o é pràticamente nulo, em virtude da simetria do retículo e, como c é muito pequeno, pode substituir-se $\frac{c + i_o}{\gamma}$ por $c + i_o$.

A igualdade (25), nesta ipótese, pode escrever-se, desenvolvendo $\cos(t_1 - \lambda)$ e atendendo às expressões (10 a):

TABELA II

$$[\log k] = 2\ M\ \mathrm{sen}^2 \frac{I}{2} \qquad [N] = I - \mathrm{sen}\ I$$

I	[log k]	Partes proporcionais de [log k]									[N]
		1s	2s	3s	4s	5s	6s	7s	8s	9s	
0m 0s	0.0000000	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0s.00
10	0001	0	1	1	1	1	1	2	3	3	0 00
20	0005	0	1	1	2	2	3	3	4	5	0 00
30	0010	1	2	3	3	4	4	5	6	7	0 00
40	0018	1	2	3	4	5	6	7	8	10	0 00
50	0029	1	2	3	4	6	7	8	10	11	0.00
1 0	0041	2	3	4	6	8	9	10	12	14	0.00
10	0056	2	3	5	7	9	10	12	14	16	0 00
20	0074	2	3	5	7	9	11	13	15	17	0.01
30	0093	2	4	6	8	11	13	15	17	20	0.01
40	0115	2	4	7	9	12	14	16	19	21	0.01
50	0139	2	5	8	10	13	16	18	21	24	0.02
2 0	0165	3	6	9	12	14	17	20	23	26	0.02
10	0194	3	6	9	12	15	18	22	25	28	0.03
20	0225	3	7	10	13	16	20	23	27	30	0.04
30	0258	4	7	11	14	18	21	25	29	31	0.04
40	0294	4	7	11	15	19	22	26	30	34	0 05
50	0332	4	8	12	16	20	24	28	32	36	0.06
3 0	0372	4	8	13	17	21	25	30	34	38	0.08
10	0415	4	8	13	17	22	26	31	35	40	9.09
20	0459	5	9	14	19	24	28	33	38	43	0.11
30	0506	5	10	15	20	25	30	35	40	45	0.12
40	0556	5	10	15	21	26	32	37	42	47	0.14
50	0607	6	11	16	22	27	33	38	43	49	0.16
4 0	0661	6	11	17	23	28	34	39	45	51	0.18
19	0718	6	11	17	23	29	35	41	47	53	0 21
20	0776	6	12	18	24	30	37	43	49	55	0.23
30	0837	6	13	19	25	32	38	44	50	57	0.26
40	0900	7	13	20	26	33	39	46	52	59	0.29
50	0966	7	13	20	27	33	40	47	54	61	0.32
5 0	1034	7	13	20	27	34	41	48	55	63	0.36
10	1104	7	14	21	28	35	43	50	57	64	0.40
20	1176	7	14	22	29	37	44	52	59	67	0.44
30	1250	8	15	23	31	39	46	54	62	70	0.48
40	1327	8	16	24	32	40	48	56	64	72	0.52
50	1407	8	16	24	32	41	49	57	65	73	0.57

$$[\log k] = 2\ M\ \text{sen}^2 \frac{I}{2} \qquad [N] = I - \text{sen}\ I$$

I	[log k]	Partes proporcionais de [log k]									[N]
		1s	2s	3s	4s	5s	6s	7s	8s	9s	
6m 0s	0 0001488	9	17	25	33	42	50	59	67	76	0s.62
10	1572	9	17	26	34	43	51	60	69	78	0 67
20	1658	9	18	26	35	44	53	62	71	80	0 73
30	1747	9	18	27	36	45	54	63	72	82	0 79
40	1837	9	19	28	37	46	56	65	74	84	0 85
50	1930	10	19	29	38	48	57	67	76	86	0 91
7 0	2026	10	19	29	39	49	58	68	78	87	0.98
10	2123	10	20	30	40	50	60	70	80	90	1.05
20	2223	10	20	30	41	51	61	71	82	92	1.12
20	2325	11	21	31	42	52	63	73	84	94	1.20
40	2430	11	21	32	42	53	64	74	85	96	1.28
50	2537	11	21	32	43	54	65	76	87	98	1.37
8 0	2646	11	22	33	44	55	66	77	88	100	1.46
10	2757	11	23	34	45	56	68	79	90	102	1.55
20	2871	11	23	34	46	57	69	81	92	104	1.65
30	2987	12	23	35	47	58	70	82	94	106	1.75
40	3105	12	24	36	48	60	72	84	96	108	1.86
50	3225	12	25	37	49	62	74	86	88	110	1.97
9 0	3348	13	25	37	50	63	75	88	100	112	2.08
10	3473	13	26	38	51	64	76	89	102	114	2.20
20	3601	13	26	38	51	64	77	90	103	116	2.32
30	3731	13	26	39	52	65	78	92	105	118	2.45
40	3863	13	26	40	53	66	79	93	107	120	2.58
50	3997	14	27	41	54	68	82	95	109	122	2.72
10 0	4134	14	27	41	55	69	83	96	110	124	2.86
10	4272	14	28	42	56	70	84	98	112	127	3.00
20	4414	14	28	43	57	71	85	100	114	129	3.15
30	4557	15	29	44	58	73	87	102	117	131	3 30
40	4703	15	29	44	59	74	88	103	118	133	3.46
50	4851	15	30	45	60	75	90	105	120	135	3.63
11 0	5001	15	31	46	61	76	92	107	122	137	3.80
10	5154	15	31	46	62	77	93	108	124	139	3.98
20	5309	16	31	47	63	78	94	110	126	141	4.16
30	5466	16	32	48	64	80	96	112	128	143	4.34
40	5626	16	32	49	64	81	97	113	129	145	4.53
50	5788	16	32	49	65	82	98	114	131	147	4.73

TABELA III

$$\text{Correcção} = \frac{(\log k)^2}{2\,M}$$

(log k) (valor médio)	Correcção
0.0001	0.0000000,1
2	0,3
3	0,8
4	1,4
5	2,2
6	3,3
7	4,3

$$c + i_o = -h\cos(\varphi - \beta)\,\operatorname{sen}\delta_l + h\cos\delta_l\cos t_l\,\operatorname{sen}(\varphi - \beta) + h\cos\delta_l\,\operatorname{sen} t_l\cos b\,\operatorname{sen} a$$

e como pràticamente: [8]

$$\cos b = 1 \quad b = \beta \quad \operatorname{sen} a = a \quad h = 1$$

teremos:

$$c + i_o = -\cos(\varphi - b)\,\operatorname{sen}\delta_l + \cos\delta_l\cos t_l\,\operatorname{sen}(\varphi - b) + a\cos\delta_l\,\operatorname{sen} t_l$$

Determinando φ_l e z pelas condições:

$$\begin{aligned} \cos z\,\operatorname{sen}\varphi_l &= \operatorname{sen}\delta_l \\ \cos z\cos\varphi_l &= \cos\delta_l\cos t_l \qquad (26) \\ \operatorname{sen} z &= \cos\delta_l\,\operatorname{sen} t_l \end{aligned}$$

será:

$$c + i_o = \cos z\,\operatorname{sen}(\varphi - \varphi_l - b) + a\,\operatorname{sen} z$$

Os valores de φ_l e de z podem deduzir-se pelas formulas:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi_l &= \frac{\operatorname{tg}\delta_l}{\cos t_l} = \frac{k\,\operatorname{tg}\delta}{\cos t} \qquad (27) \\ \operatorname{tg} z &= \operatorname{tg} t_l\cos\varphi_l \end{aligned}$$

devendo tomar-se com o signal — o valor de tg z quando se trata de uma passagem E (tg $t_l < o$).

O ângulo φ_l é muito próximo de φ, visto que as condições (26) que

determinam φ_1 são análogas às relações que existem no primeiro vertical entre φ, δ, t e z, sendo também δ_1 e t_1 valores muito aproximados de δ e de t.

Será então:

$$c + i_0 = (\varphi - \varphi_1 - b) \cos z + a \operatorname{sen} z$$

Designando por φ_0 e por a_0 valores aproximados da latitude do lugar e do êrro instrumental de azimute e por $\Delta\varphi$ e Δa as correcções a introduzir, nesses valores aproximados para ter os valores exactos, tem-se:

$$c + i_0 = (\varphi_0 - \varphi_1 - b) \cos z + \Delta\varphi \cos z + a_0 \operatorname{sen} z + \Delta a \operatorname{sen} z$$

ou ainda:

$$c \sec z - \Delta a \operatorname{tg} z - \Delta\varphi + \varphi_1 + b - \varphi_0 - a_0 \operatorname{tg} z + i_0 \sec z = 0$$

Representando por f a soma dos termos conhecidos:

$$f = \varphi_1 + b - \varphi_0 - a_0 \operatorname{tg} z + i_0 \sec z$$

tem-se finalmente:

$$c \sec z - \Delta a \operatorname{tg} z - \Delta\varphi + f = 0$$

que é a equação que resulta da observação de uma estrêla.

Os valores mais prováveis de c, Δa e $\Delta\varphi$ podem portanto deduzir-se aplicando o método dos mínimos quadrados ao sistema das equações, análogas à anterior, que resultam das observações das diferentes estrêlas.

Redução das observações ao fio do meio.

11 — Do tempo da passagem de uma estrêla sôbre qualquer dos fios do retículo pode deduzir-se o tempo da passagem no fio do meio desde que se conheça o valor do intervalo dos dois fios.

A correcção a introduzir nesse valor do tempo depende da declinação da estrêla não só por ser diferente a velocidade do seu movimento aparente, como acontece nas observações meridianas, mas ainda por variar a inclinação da sua trajectória em relação aos fios.

Essa correcção depende portanto da latitude φ do lugar de observação como se conclui imediatamente do que se referiu no § 1.

Designando por I o intervalo de tempo que decorre entre a passagem de uma estrêla no fio do meio e a passagem num fio cujo intervalo equatorial é i teremos para as passagens na primeiro vertical de W:

$$\operatorname{sen}(c + i) = -\operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \cos n \cos \delta \cos (t - I - \lambda)$$

onde t é o ângulo horário da estrêla quando passa no fio do meio; e para as passagens no 1.º vertical de E:

$$\text{sen}\,(c+i) = -\,\text{sen}\,n\,\text{sen}\,\delta + \cos n \cos\delta \cos(t+I-\lambda)$$

Estas expressões resultam evidentemente de aplicar a teoria geral que conduziu a (4) a um fio de colimação $c+i$.

Subtraíndo da 1.ª das igualdades anteriores a igualdade (4) vem:

$$\text{sen}\,\frac{i}{2}\cos\left(c+\frac{i}{2}\right) = \cos n \cos\delta\,\text{sen}\left(t-\lambda-\frac{I}{2}\right)\text{sen}\,\frac{I}{2}$$

Sendo a pequeno é com rigor suficiente:

$$n = 90^\circ - (\varphi - b)$$

Substituindo ainda sen c por zero e cos c por 1 teremos:

$$\text{sen}\,\frac{I}{2} = \frac{\text{sen}\,i}{2\,\text{sen}\,(\varphi-b)\cos\delta\,\text{sen}\left(t-\lambda-\frac{I}{2}\right)} \quad \ldots\ (28)$$

Para a passagem no 1.º vertical de E deduzir-se-hia anàlogamente um valor de sen $\frac{I}{2}$ igual e de signal contrário ao anterior.

A expressão anterior, quando a estrêla não é zenital, conduz pràticamente ao mesmo resultado que a fórmula simplificada:

$$I = \frac{i}{\text{sen}\,\varphi\cos\delta\,\text{sen}\left(t-\lambda-\frac{I}{2}\right)} \quad \ldots\ (29)$$

Quando se observam as passagens E e W da mesma estrêla o valor de $t-\lambda$ deduz-se fàcilmente, visto que, em valor absoluto, é metade do tempo 2τ decorrido entre as 2 passagens da estrêla sôbre o fio do meio.

Para calcular os valores definitivos de I por qualquer das fórmulas (28) ou (29) tem que se partir de valores provisórios que se deduzem das próprias observações, e que são as diferenças entre os tempos das passagens no fio do meio e os das passagens nos diferentes fios do retículo.

A fórmula (29) pode escréver-se muito simplesmente:

$$I = \frac{i}{\text{sen}\,\varphi\cos\delta\,\text{sen}\left(\tau-\frac{I}{2}\right)} \quad \ldots\ (29\,a)$$

onde τ é metade do tempo decorrido entre as duas passagens da estrêla

sôbre o fio do meio, tomado, evidentemente, com o signal + para as passagens W e com o signal — para as passagens E.

Determinação da latitude astronómica observando as passagens este e oeste da mesma estrêla.

12 — Fazendo a observação das passagens E e W das mesmas estrêlas podem usar-se os seguintes métodos:

1.° — Observando as passagens E e W sem inverter o instrumento.
2.° — Observando as passagens E e invertendo o instrumento para fazer a observação das passagens W.
3.° — Observando as passagens E, nas duas posições do do eixo de rotação da luneta, e observando também as passagens W nessas duas posições. Só pode portanto fazer-se a observação de passagens em parte dos fios do retículo.

Analisemos sucessivamente estas diversas formas de proceder:

I — O eixo de rotação da luneta está na mesma posição quando se observam as passagens E e W de cada estrêla.

a) *Determinação da latitude.*

13 — Representando por θ e θ' os tempos marcados pelo cronómetro nos instantes das passagens E e W de uma estrêla num fio do retículo cuja colimação é c e por $\Delta\theta$ e $\Delta\theta'$ as correcções do cronómetro nesses instantes, as fórmulas:

$$\varphi = \varphi' + b + c \operatorname{cosec} \delta \operatorname{sen} \varphi'$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \delta \cos \lambda \sec \tau \qquad (30)$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(\theta + \theta') + \frac{1}{2}(\Delta\theta + \Delta\theta') - \alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\theta' + \theta) + \frac{1}{2}(\Delta\theta' - \Delta\theta)$$

deduzidas no § 8 permitem deduzir o valor da latitude φ.

Cada fio do retículo fornece assim um valor de φ e portanto a observação de uma estrêla conduz a tantos valores da latitude quantos são os fios do retículo.

Quando a latitude é determinada pelo método de Talcott ou por obser-

vação directa de distâncias zenitais meridianas, cada par de estrêlas fornece um único valor de φ. Essa circunstância compensa de algum modo a demora que representa o ter que se esperar pela passagem W das estrêlas que se observaram na passagem E.

O erro instrumental *b* que figura nas fórmulas anteriores deduz-se das leituras do nível do eixo de rotação da luneta. Os valores dos erros de colimação dos fios do retículo podem deduzir-se dos intervalos dos fios e do erro de colimação de um dêsses mesmos fios.

Na prática, em vez de calcular um valor de φ a partir das observações feitas em cada um dos fios e tomar para valor final da latitude a média dêsses resultados, pode fazer-se a redução das observações ao fio do meio. O valor de φ é deduzido uma só vez, pelas fórmulas (30), devendo tomar-se para valores de θ e de θ' as médias dos tempos das passagens no fio do meio, deduzidos por redução das observações feitas em todos os fios.

Usam-se então as fórmulas (28) e (29) para o que é necessário conhecer os valores dos intervalos dos fios.

Não sendo conhecidos os intervalos dos fios tem que se determinar uma latitude para cada fio, visto que se não pode fazer a redução ao fio do meio.

Os valores de *c* que figuram na primeira igualdade (30) são também desconhecidos. Por isso será preciso observar 2 estrêlas para que as duas equações análogas à primeira (30), consideradas com as 2 incógnitas φ e *c*, permitam deduzir o valor de φ.

Voltaremos a êste assunto referindo a forma prática de fazer, neste caso, o cálculo da latitude.

b) *Influência dos erros que afectam os valores das grandezas necessárias ao cálculo da latitude.*

14 — Analizando as fórmulas (30) reconhece-se o valor dêste processo de determinação da latitude.

Os erros que podem resultar para φ' e que afectam totalmente o valor de φ proveem dos erros de δ, λ e τ.

Diferenciando a 2.ª equação (30), supondo λ e τ constantes, vem:

$$\frac{d\,\varphi'}{\cos^2\varphi'} = \frac{d\,\delta}{\cos^2\delta}\cos\lambda\sec\tau$$

$$d\,\varphi' = \operatorname{tg}\delta\sec\tau\cos\lambda\,\frac{\cos^2\varphi'}{\operatorname{tg}\delta}\,\frac{d\,\delta}{\cos^2\delta} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'\cos^2\varphi'}{\operatorname{tg}\delta\cos^2\delta}\,d\,\delta$$

ou:

$$d\,\varphi' = \frac{\operatorname{sen} 2\,\varphi'}{\operatorname{sen} 2\,\delta}\, d\,\delta$$

O erro de φ, que resulta de um erro na declinação da estrêla, é pràticamente igual a êste último erro desde que se usem estrêlas que passem no primeiro vertical de W pouco depois de passarem no de E.

Quando a latitude do lugar de observação fôr maior do que 45° será, para as outras estrêlas:

$$d\,\varphi' < d\,\delta$$

acontecendo o contrário para latitudes inferiores a 45°.

A longitude λ do meridiano do instrumento é sempre pequena e por isso um êrro que exista em λ não vai afectar o valor de cos λ.

Um êrro que exista em τ só pode provir do conhecimento imperfeito da marcha do cronómetro, e por isso poder-se-há considerar nulo desde que se observem estrêlas cuja declinação seja pròximamente φ. O tempo $2\,\tau$ decorrido entre as duas passagens é então muito pequeno o que não só determina que a correcção $\Delta\vartheta$ do cronómetro não tenha variado, mas ainda que o valor de sec τ seja pouco influenciado por um êrro de τ.

Se supozermos por exemplo que existe no valor de τ o êrro exagerado de $0,^s5$ e que 2τ é 2^h, teremos: $|d\,\varphi'| < 1''$.

Com efeito, supondo na 2.ª equação (30) que δ e λ são constantes, teremos:

$$\sec^2 \varphi'\, d\,\varphi' = \operatorname{tg} \delta \cos \lambda \sec \tau \operatorname{tg} \tau\, d\,\tau$$

donde:

$$d\,\varphi' = \operatorname{tg} \varphi' \cos^2 \varphi' \operatorname{tg} \tau\, d\,\tau$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\,\varphi' \operatorname{tg} \tau\, d\,\tau$$

e como:

$$\operatorname{sen} 2\,\varphi' \leqq 1 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg} 15^\circ = 0{,}26$$

será:

$$|d\,\varphi'| \leqq 0,^s06 = 0'',9$$

Os erros que afectam o valor final de φ não são unicamente os de φ'.

Os erros que existam nos valores de b e c vão também afectar êsse valor de φ.

É porém fácil de vêr que se, numa outra noite, forem observadas as passagens da mesma estrêla, depois de inverter a luneta, a média dos valores deduzidos para a latitude vem, pràticamente, livre do efeito dêsses erros instrumentais.

Representemos, com efeito, por p a correção de desigualdade dos mu-

nhões e por b_1 e b_2 as inclinações, deduzidas do nível, nas duas noites; as inclinações do eixo de rotação da luneta são $b_1 + p$ e $b_2 - p$ e portanto, como mostra a primeira fórmula (30), a média das duas latitudes deduzidas não é afectada pela desigualdade dos munhões.

Suponhamos que a colimação exacta do fio do meio para a 1.ª posição do instrumento é $c + \gamma$ e não c.

Como mostra a mesma fórmula (30) a média dos dois valores φ_1 e φ_2 deduzidos para a latitude é afectada pelo erro:

$$\frac{\gamma}{2} \operatorname{cosec} \delta \, (\operatorname{sen} \varphi_1' - \operatorname{sen} \varphi_2')$$

designando por φ_1' e por φ_2' os valores deduzidas para φ', pela 2.ª equação (30), nas duas noites.

Os angulos φ'_1 e φ'_2 são quási iguais e por isso o êrro γ, já de si muito pequeno, vem a ter uma influência desprezível no valor final da latitude.

Sendo as observações feitas, em duas noites, pela forma que indicámos, os erros devidos à flexão do êrro de rotação da luneta são, evidentemente, eleminados,

15 — Exemplo:

Observatório Astronómico da Universidade de Lisboa (Cúpula Norte)

Observação de passagens no 1.° vertical

1928 — Junho — 15 **I. P. de Repsold** **Obs.: V. H. Lemos**

γ Bootis Luz a Sul

Fios	Passagem E	Passagem W
	Nivel: N = 37,2 S = 14,0 N' = 23,9 S' = 47,1	Nivel: N = 23,9 S = 47,9 N' = 39,5 S' = 15,5
X	$14^h\ 17^m\ 5^s.19$	$14^h\ 46^m 48^s.64$
XI	18 50 .82	45 4 .21
XII	20 51 .95	43 0 .24
XIII	23 9 .25	40 43 .32

Correção da pendula às $15^h\ 15^m$: $2^m\ 52^s,74$ (1) Marcha: $+0^s.18$.

(1) A correção da pendula sideral I foi deduzida por observação de passagens meridianas na luneta Cook da cupula Sul.

O I. P. de Repsold tem 16 fios, designando-se por fio I o que está mais afastado do tambor do micrómetro ocular.

O retículo não tem fio do meio; os intervalos dos fios, a que se refere a observação anterior, tomados para a média dos fios e as suas colimações (luz a N) são:

Fios	Intervalos	Colimações
X	— 9^s.33	- 8^s.77
XI	— 12 .35	- 11 .79
XII	— 15 .53	- 13 .97
XIII	— 18 .50	- 17 .94

Os valores dos intervalos dos fios foram determinados, com um êrro inferior a 0,^{s}01 por observações meridianas feitas nesta época.

A colimação da média dos fios, que é + 0,^{s}56 (Luz a N) foi deduzida das colimações dos fios VII, VIII, IX, X, XI e XII que, por sua vez, se mediram, visando uma referencia terrestre.

O nível do eixo de rotação era o P. S. 1.150703 sendo o valor de uma divisão: 1″,01.

As inclinações do eixo são portanto:

Na passagem E: $b = -4.^d 9 = -4''.95$

Na passagem W $b = -4.^d 2 = -4''.24$

Cálculo da latitude

γ Bootis $\alpha = 14^h\ 29^m 12^s.300$ $\delta = +38^0\ 37'\ 26''.08$ (Luz a S)

	Fio X	Fio XI	Fio XII	Fio XIII
θ	$14^h\ 17^m\ 5^s.19$	$14^h\ 18^m\ 50^s.82$	$14^h\ 20^m\ 51^s.95$	$14^h\ 23^m\ 9^s.25$
θ'	$14^h\ 46^m\ 48^s.64$	$14^h\ 45^m\ 4^s\ 21$	$14^h\ 43^m\ 0^s.24$	$14^h\ 40^m\ 43^s.82$
$\Delta\theta$	$-\ 2^m\ 52^s.75$	$-\ 2^m\ 52^s.75$	$-\ 2^m\ 52^s.75$	$-\ 2^m\ 52^s.75$
$\Delta\theta'$	$-\ 2^m\ 52^s.74$	$-\ 2^m\ 52^s.74$	$-\ 2^m\ 52^s.74$	$-\ 2^m\ 52^s.74$
α	$14^h\ 29^m\ 12^s.30$	$14^h\ 29^m\ 12^s\ 30$	$14^h\ 29^m\ 12^s.30$	$14^h\ 29^m\ 12^s.30$
λ	$-\ 7^s.14 = -\ 1'\ 47''$	$-\ 7^s.53 = -\ 1'\ 53''$	$-\ 8^s.96 = -\ 2'\ 14''$	$-\ 8^s.76 = -\ 2'\ 11''.40$
τ	$14^m\ 51^s.72 = 3^0\ 42'\ 55''.80$	$13^m\ 6^s.69 = 3^0\ 16'\ 40''.35$	$11^m\ 4^s.14 = 2^0\ 46'\ 2''.10$	$8^m\ 47^s.03 = 2^0\ 11'\ 45''.45$
log tg δ	$\bar{1},9025321$	$\bar{1},9025321$	$\bar{1},9025321$	$\bar{1},9025321$
log sec δ	$0,0009138$	$0,0007111$	$0,0005067$	$0,0003190$
log cos τ	$\bar{1},9999999$	$\bar{1}.9999999$	$\bar{1},9999999$	$\bar{1},9999999$
log tg φ'	$\bar{1},9024458$	$\bar{1},9032431$	$\bar{1},9000387$	$\bar{1},9028510$
φ'	$38^0\ 40'\ 57''.82$	$38^0\ 40'\ 10''.83$	$38^0\ 39'\ 23''.47$	$38^0\ 38'\ 39''.95$
c	$+\ 8^s.77 = +\ 131''.55$	$+\ 11^s.79 = +\ 176''.85$	$+\ 14^s,97 = 224''.55$	$+\ 17^s,94 = +\ 269''.10$
log c	$2,1190909$	$2,2470057$	$2,3513131$	$2,4299137$
log sen φ'	$\bar{1}.7958852$	$\bar{1},7957615$	$\bar{1},7958852$	$\bar{1},7955224$
$-$ log sen δ	$0,2046723$	$0,2046723$	$0,2046723$	$0,2046723$
log c cosec δ sen λ'	$2\ 1196484$	$2,2480389$	$2,3518706$	$2,4301084$
c cosec δ sen φ'	$+\ 131''.72$	$+\ 177''.03$	$+\ 224''.84$	$+\ 269''.22$
b	$-\ 4''.59$	$-\ 4''.59$	$-\ 4''.59$	$-\ 4''.59$
φ	$38^0\ 43'\ 4''.95$	$38^0\ 43'\ 3''.27$	$38^0\ 43'\ 3''.72$	$38^0\ 43'\ 4''.53$

O valor médio é: $\varphi = 38^0\ 43'\ 4''.13$

Observação de passagens no 1.º vertical

1928 — Junho 20 | I. P. de Repsold | Ob.or V. H. Lemos

γ Bootis

LUZ A NORTE		
Fios	Passagem E Nível: N — 22,2 S — 47,4 N′ — 41,0 S′ — 15,6	Passagem W Nível: N — 41,4 S — 14,4 N′ — 20,2 S′ — 47,3
XIII	14h 6m 43s.10	14h 57m 7s.54
XII	7 39 .06	56 12 .09
XI	8 43 .26	53 9 .07
X	9 42 .86	54 5 .80

Correção da pêndula

às 13h45m : — 2m51s.89

Marcha : + 0s.18

As inclinações do eixo de rotação são portanto:

Na passagem E : — 3d.25 = — 3″.28

Na passagem W : — 2d.92 = — 2″.94

Cálculo da latitude

γ Bootis $\alpha = 14^h\,29^m\,12^s.242$, $\delta = +\,38^0\,37'\,26''.99$

	Fio X	Fio XI
$\theta + \Delta\theta$	14h 6m 50s.97	14h 5m 51s.37
$\theta' + \Delta\theta'$	14h 51m 13s.92	14h 52m 17s.19
α	14h 29m 12s.24	14h 29m 12s.24
λ	— 9s.79 = — 2′ 27″	— 7s.96 = — 1′ 59″
τ	22m 11s.47 = 5° 32′ 52″.05	23m 12s.91 = 5° 48′ 13″.65
log tg δ	$\bar{1}$, 9025360	$\bar{1}$, 9025360
log sec τ	0, 0020390	0, 0022319
log cos λ	$\bar{1}$, 9999999	$\bar{1}$, 9999999
log tg φ'	$\bar{1}$, 9045749	$\bar{1}$, 9047678
φ'	38° 45′ 19″.47	38° 46′ 4″.19
c	— 131″.55	— 176″.85
log c	2, 1190909 n	2, 2476051 n
log sen φ'	$\bar{1}$, 7965723	$\bar{1}$, 7966895
— log sen δ	0, 2046699	0, 2046699
log c cosec δ sen φ'	2, 1203331 n	2, 2489645 n
c cosec δ sen φ'	— 131″,93	— 177″.40
b	— 3″.11	— 3″.11
φ	38° 43′ 4″.43	38° 43′ 3″.68

Cálculo da latitude

γ Bootis $\alpha = 14^h\ 29^m\ 12^s.242$
$\delta = +\ 38^0\ 37'\ 26''.99$

	Fio XII	Fio XIII
$\theta+\Delta\theta$	$14^h\ 4^m\ 47^s.17$	$14^h\ 3^m\ 51^s.21$
$\theta'+\Delta\theta'$	$14^h\ 53^m\ 20^s.21$	$14^h\ 54^m\ 15^s.66$
α	$14^h\ 29^m\ 12^s.24$	$14^h\ 29^m\ 12^s.24$
λ	$-8^s.55$	$-8^s.81$
τ	$24^m\ 16^s.52 = 6^0\ 4'\ 7''.80$	$25^m\ 12^s.22 = 6^0\ 18'\ 3''.30$
log tg δ	$\bar{1}, 9025360$	$\bar{1}, 9025360$
log sec τ	$0, 0024408$	$0, 0026315$
log cos λ	$\bar{1}, 9999999$	$\bar{1}, 9999999$
log tg φ'	$\bar{1}, 9049767$	$1, 9051674$
φ'	$38^0\ 46'\ 52''.62$	$38^0\ 47'\ 36''.85$
c	$-224''.53$	$-269''.10$
log c	$2, 3518706$ n	$2, 4301084$ n
log sen φ'	$\bar{1}, 7968166$	$\bar{1}, 7969324$
$-$ log sen δ	$0, 2046699$	$0, 2046699$
log c cosec δ sen φ'	$2, 3533571$ n	$2, 4317107^m$
c cosec δ sen φ'	$-225''.61$	$-270''.22$
b	$-3''.11$	$-3''.11$
φ	$38^0\ 43'\ 3''.90$	$38^0\ 43'\ 3''.52$

O valor médio é: $\varphi = 38^0\ 43'\ 3''.88$

O valor deduzido das observações das duas noites é:

$$\varphi = 38^0\ 43'\ 4''.01$$

Observações:

O cálculo da latitude podia fazer-se começando por reduzir as observações à média dos fios como se indicou no § 11.

A vantagem de fazer as observações em duas noites e em posições diferentes do instrumento não é muito notada neste exemplo por estarem bem determinados os valores das colimações dos fios observados.

Se se introduzisse um êrro na colimação verificar-se-ia que as médias das observações em cada noite se afastariam sem que se alterasse a média das observações feitas nas duas noites.

c) *Determinação da latitude quando não se conhecem os intervalos dos fios.*

16 — Observando numa noite, com a luz a N por exemplo, as passagens E e W de uma estrêla sôbre um fio, de colimação c, teremos:

$$\varphi = \varphi_n' + b_n + c \operatorname{sen} \varphi'_n \operatorname{cosec} \delta \quad \ldots (31)$$

onde

$$\operatorname{tg} \varphi'_n = \operatorname{tg} \delta \sec \tau_n \cos \lambda \quad \ldots (32)$$

Observando, noutra noite, as passagens da mesma estrêla, depois de inverter o instrumento, isto é com a luz a S, teremos:

$$\varphi = \varphi'_s + b_s - c \operatorname{sen} \varphi'_s \operatorname{cosec} \delta \quad \ldots (33)$$

onde

$$\operatorname{tg} \varphi'_s = \operatorname{tg} \delta \sec \tau_s \cos \lambda \quad \ldots (34)$$

Calculados φ'_n e φ'_s ficamos dispondo de duas equações que permitem determinar φ e c.

Na prática, a resolução dêste sistema pode fazer-se, mais còmodamente, introduzindo os dois ângulos auxiliares φ_o e γ definidos pelas igualdades:

$$\begin{aligned} 2\varphi_o &= \varphi'_n + b_n + \varphi'_s + b_s \\ 2\gamma &= \varphi'_n + b_n - (\varphi'_s + b_s) \end{aligned} \quad \ldots (35)$$

de que resultam:

$$\varphi'_n + b_n = \varphi_o + \gamma$$

$$\varphi'_s + b_s = \varphi_o - \gamma$$

e portanto:

$$\varphi - \varphi_o = \gamma + c \operatorname{sen} \varphi'_n \operatorname{cosec} \delta$$

$$\varphi - \varphi_o = -\gamma - c \operatorname{sen} \varphi'_s \operatorname{cosec} \delta$$

Eliminando c vem:

$$\varphi - \varphi_o = \frac{\gamma (\operatorname{sen} \varphi'_s - \operatorname{sen} \varphi'_n)}{\operatorname{sen} \varphi'_n + \operatorname{sen} \varphi'_s} = -\gamma \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi'_n - \varphi'_s)}{\operatorname{tg} \frac{1}{2} (\varphi'_n + \varphi'_s)}$$

A expressão de γ mostra que, pràticamente $2\gamma = \varphi'_n - \varphi'_s$. Substituindo também $\frac{1}{2}(\varphi'_n + \varphi'_s)$ por um valor aproximado φ da latitude do lugar, teremos:

$$\varphi - \varphi_o = -\frac{1}{4} (\varphi'_n - \varphi'_s)^2 \operatorname{sen} 1'' \operatorname{cotg} \varphi \quad \ldots (36)$$

Calculando então φ'_n, φ'_s e φ_o, por (32), (34) e (35), poder-se-á deduzir, de (36), a latitude astronómica.

As equações (31) e (33) dão o valor da colimação c do fio a que se referem as observações.

Será:

$$c = -\frac{(\varphi'_n + b_n - \varphi'_s - b_s) \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen} \varphi'_n + \operatorname{sen} \varphi'_s}$$

ou, tornando-a logarítmica:

$$c = -\frac{(\varphi'_n + b_n - \varphi'_s - b_s)\,\operatorname{sen}\,\delta}{2\,\operatorname{sen}\frac{\varphi'_n+\varphi'_s}{2}\cos\frac{\varphi'_n-\varphi'_s}{2}} \quad \ldots (37)$$

Dos valores das colimações dos diferentes fios podem deduzir-se os seus intervalos referidos ao fio do meio desde que se conheça a colimação dêste último fio.

17 — Exemplo.

Supondo que não se conheciam os intervalos dos fios do I. P. de Repsold que se usou nas observações do exemplo anterior, o cálculo da latitude deveria fazer-se da seguinte forma:

1928 — Junho 15

γ Bootis Luz a S (1) $b_s = -4''.59$

Fios	φ'_s
X	38° 40′ 57″.82
XI	40′ 10″.83
XII	39′ 23″.47
XIII	38′ 39″.95

γ Bootis Luz a N (1) $b_n = -3''.11$

Fios	φ'_n
X	38° 45′ 19″.47
XI	46′ 4″.19
XII	46′ 52″.62
XIII	47′ 36″.85

Fios	$\frac{1}{2}(\varphi'_n+\varphi'_s)$	φ_o
X	38° 43′ 8″.64	38° 43′ 4″.79
XI	7″.51	3″.66
XII	8″.04	4″.19
XIII	8″.40	4″.55

Para calcular o 2.° membro de (26), atribuamos a φ o valor 38° 43′. Será:

$$\log.\ \tfrac{1}{4}\ \operatorname{sen} 1''\ \operatorname{cotg}\varphi = \overline{6},1795416$$

Fios	$\varphi'_n-\varphi'_s$	$\log.(\varphi'_n-\varphi'_s)^2$	$\log\left\lvert\frac{1}{4}(\varphi'_n-\varphi'_s)^2\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\varphi\right\rvert$	$\frac{1}{4}(\varphi'_n-\varphi'_s)^2\times\operatorname{sen}1''\operatorname{cotg}\varphi$	φ
X	261″.65	4,8354414	$\overline{1}$,0149830	— 0″,10	38°43′4″.69
XI	353″.36	5,0964348	$\overline{1}$,2759764	— 0″,19	3″.47
XII	449″.15	5,3047828	$\overline{1}$,4843244	— 0″,30	3″.89
XIII	536″.90	5,4597868	$\overline{1}$,6393284	— 0″,40	4.″11

O valor final da latitude, deduzida destas observações é: 38° 43′ 4″.04.

(1) Os valores de φ'_s e do φ'_n foram calculados no exemplo anterior.

As colimações dos diferentes fios podem então deduzir-se ràpidamente:

	Fio X		Fio XI	
$\varphi'_n - \varphi'_s$	261″,65		353″,36	
$\varphi'_n - \varphi'_s + b_n - b_s$	263″,13		354″,84	
$\log(\varphi'_n - \varphi'_s + b_n - b_s)$		2,4201704		2,5500326
log sen δ		$\overline{1}$,7953289		$\overline{1}$,7953289
colog 2		$\overline{1}$,6989700		$\overline{1}$,6989700
$\frac{\varphi'_n + \varphi'_s}{2}$	38° 43′ 8″		38 43′ 8″	
colog sen $\frac{\varphi'_n + \varphi'_s}{2}$		0,2037728		0,2037728
$\frac{\varphi'_n - \varphi'_s}{2}$	2′ 10″.82		2′ 56″.68	
colog cos $\frac{\varphi'_n - \varphi'_s}{2}$		0.0000001		0,0000001
log c		2,1182422n		2,2481044n
c	− 131″.29 = − 2′ 11.″29 = − 8ˢ,75		− 177″.05 = − 2′ 57″.05 = − 11ˢ.80	

	Fio XII		Fio XIII	
$\varphi'_n - \varphi'_s$	449″,15		536″,90	
$\varphi'_n - \varphi'_s + b_n - b_s$	450″,63		534″,38	
$\log(\varphi'_n - \varphi'_s + b_n - b_s)$		2,6538201		2,7310889
log sen δ		$\overline{1}$,7953289		$\overline{1}$,7953289
colog 2		$\overline{1}$,6989700		$\overline{1}$,6989700
$\frac{\varphi'_n + \varphi'_s}{2}$	38° 43′ 8″		38° 43′ 8″	
colog sen $\frac{\varphi'_n + \varphi'_s}{2}$		0,2037728		0,2037728
$\frac{\varphi'_n - \varphi'_s}{2}$	3′ 44.″57		4′ 28″.45	
colog cos $\frac{\varphi'_n - \varphi'_s}{2}$		0,0000001		0,0000003
log c		2,3518920n		2,4291609n
c	− 224″.85 = − 3′ 44″.85 = − 14ˢ.99		− 268.′ 63 = − 4′ 28.″63 = − 17ˢ.91	

A colimação da média dos fios é + 0,ˢ56 e portanto os valores dos intervalos dos fios, deduzidos destas observações, são:

X	XI	XII	XIII
− 9ˢ.31	− 12ˢ.36	− 15ˢ.55	− 18.ˢ47

que se aproximam muito dos que se determinaram por observações de passagens meridianas e vêm indicadas anteriormente,

11 — Depois de observada a passagem E da estrêla inverte-se o instrumento para observar a passagem W.

a) *Determinação da latitude.*

18 — Suponhamos que se observa a passagem E de uma estrêla na posição luz a N e que a passagem W é observada com a luz a S.

As fórmulas, que se devem usar no cálculo da latitude, são muito mais simples do que as (30).

Os erros que afectam os tempos das duas passagens da estrêla e que resultam do êrro de colimação *c*, são iguais, como mostra a fórmula (9) estabelecida no § 5; com efeito os valores de C′ para as 2 passagens são iguais e de sinal contrário e o mesmo acontece com os valores de *c* em virtude de se inverter o instrumento entre duas as observações. Nestas observações o valor de τ não é, assim, influenciado pela colimação.

O mesmo não acontece a λ. O êrro que afecta λ diminui, porém, com a colimação do fio e por isso as observações nos diferentes fios devem ser reduzidas ao fio do meio, convindo que êste tenha uma colimação pequena. O êrro que então afecta λ não tem, pràticamente, influência no valor de cos λ e, portanto, no de φ'.

As observações da passagem E conduzem, como mostra a form. (16) do § 8, a um valor da latitude:

$$\varphi = \varphi' + b_1 + c \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{\operatorname{sen} \delta}$$

e as observações da passagem W a um valor:

$$\varphi = \varphi' + b_2 - c \frac{\operatorname{sen} \varphi'}{\operatorname{sen} \delta}$$

sendo o valor, mais provável:

$$\varphi = \varphi' + b$$

onde b é a média dos valores da inclinação do eixo da rotação.

No cálculo da latitude podem então usar-se as fórmulas:

$$\varphi = \varphi' + b$$

$$\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \delta \cos \lambda \sec \tau$$

$$\lambda = \frac{1}{2}(\theta + \theta') + \frac{1}{2}(\Delta\theta + \Delta\theta') - \alpha$$

$$\tau = \frac{1}{2}(\theta' - \theta) + \frac{1}{2}(\Delta\theta' - \Delta\theta)$$

que são as que se deduzem de (30) fazendo $c = o$. Convém observar que nestas expressões θ e θ' são os tempos das passagens no fio do meio (ou na média dos fios). As considerações que fizemos anteriormente, sôbre a influência dos erros que afectam os elementos que servem no cálculo da latitude, são aplicáveis, também, quando as observações se fazem como acabamos de referir.

III — Depois de observar. no primeiro vertical E, as passagens de uma estrêla sôbre alguns dos fios do retículo inverte-se a luneta observando, de novo, as passagens da estrêla sôbre os mesmos fios; no primeiro vertical W procede-se da mesma forma, observando mais duas vezes as passagens da estrêla sôbre os fios que serviram nas primeiras observações.

19 — Êste método de observação é devido a W. Struve e conduz, por cálculos rápidos, a valores da latitude isentos da influência dos erros instrumentais.

O intervalo de tempo decorrido entre as passagens E e W da estrêla sôbre um fio quando o eixo de rotação do instrumento tem a mesma posição (luz a N, por ex.,) é diferente do intervalo de tempo que decorre entre as duas passagens no mesmo fio na outra posição do instrumento (luz a S). Esta diferença resulta de que se fôr $+c$ a colimação dêsse fio, numa das posições do instrumento, será $-c$ a colimação na outra posição e portanto, se designarmos por 2τ e por $2\tau'$ os correspondentes intervalos de tempo que decorreram, teremos, atendendo à fórm. (4) do § 4 e a que $t - \lambda$ é metade do intervalo de tempo decorrido entre as duas passagens da estrêla:

$$\operatorname{sen} c = -\operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \cos n \cos \delta \cos \tau$$

$$-\operatorname{sen} c = -\operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \cos n \cos \delta \cos \tau' \qquad \ldots(38)$$

donde:

$$o = -2 \operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta + \cos n \cos \delta (\cos \tau + \cos \tau')$$

ou:

$$\operatorname{sen} n \operatorname{sen} \delta = \cos n \cos \delta \cos \frac{\tau + \tau'}{2} \cos \frac{\tau - \tau'}{2}$$

e portanto:

$$\operatorname{cotg} n = \operatorname{tg} \delta \sec s \sec u$$

sendo:

$$\frac{\tau + \tau'}{2} = s \qquad \frac{\tau - \tau'}{2} = u$$

Atendendo às duas primeiras fórmulas (10 a) tem-se:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \beta) = \cos\lambda \operatorname{cotg} n$$

ou:

$$\operatorname{tg}(\varphi - \beta) = \operatorname{tg}\delta \sec s \sec u \cos\lambda$$

que se pode ainda escrever, substituindo, como se tem feito anteriormente, β por b:

$$(39)\ldots \quad \begin{cases} \operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\delta.\ \sec s.\ \sec u.\ \cos\lambda \\ \varphi = \varphi' + b \end{cases}$$

Dos tempos das quatro passagens da estrêla sôbre o mesmo fio resulta, como se vê, um valor da latitude.

Convém observar que, por ser muito pequeno o valor de λ, o valor de cos λ que se deduz das observações que se referem a um dos fios é o mesmo que o que se deduz das observações que se referem a qualquer dos outros.

20 — Exemplo

Observatório Astronómico da Universidade de Lisboa

Observação de passagens no 1.º vertical

1928 — Junho — 15 **I. P. de Repsold** **Ob: V. H. Lemos**

γ Bootis $\alpha = 14^h\ 29^m\ 12^s.30$ $\rho = +38^0\ 37'\ 26''.08$

LUZ A S		
Fios	Passagem E	Passagem W
	Nivel: N = 37,2 S = 14,0 N′ = 23,9 S′ = 47,1	Nivel: N = 23,9 S = 47,9 N′ = 39,5 S′ = 15,5
X	14h 17m 5s.19	14h 46m 48s.64
XI	18 50 .82	45 4 .21
XII	20 51 .95	43 0 .23
XIII	23 9 .25	49 43 .32

LUZ A N		
Fios	Passagem E	Passagem W
	Nivel: N = 36,2 S = 13,3 N′ = 23,9 S′ = 47,0	Nivel: N = 25,0 S = 49,1 N′ = 37,1 S′ = 13,0
XIII	14h 6m 43s.01	14h 57m 14s.30
XII	7 39 .06	56 16 .67
XI	8 40 .29	55 14 .91
X	9 42 .49	54 12 .13

A correcção da pendula é de $2^m\ 52^s.74$.

O valor de log cos λ deduzido dos tempos das passagens E W em qualquer dos fios é de $\bar{1},9999999$.

O valor de uma divisão do nível do eixo de rotação é de $1''.01$; a média dos 4 valores de b deduzidos das leituras do nível é $-5''.17$.

Cálculo da latitude

	Fio X	Fio XI
2τ	$44^m\ 29^s.64$	$46^m\ 34^s.62$
$2\tau'$	$29^m\ 43^s.45$	$25^m\ 13^s.39$
τ	$22^m\ 14^s.82$	$23^m\ 17^s.31$
τ'	$14^m\ 51^s.72$	$13^m\ 6^s.69$
s	$18^m\ 33^s.27 = 4^0\ 38'.19''$	$18^m\ 12^s.00 = 4^0\ 33'\ 0''$
u	$3^m\ 41^s.55 = 55'\ 23''$	$5^m\ 5^s.31 = 1^0\ 16'\ 20''$
log sec s	0,0014248	0,0013708
log sec u	0,0000564	$\bar{0},0001071$
log tg δ	$\bar{1},9025321$	$\bar{1},9025321$
log cos λ	$\bar{1},9999999$	$\bar{1},9999999$
log tg φ'	$\bar{1},9040132$	$\bar{1},9040099$
φ'	$38^0\ 43'\ 9''.20$	$38^0\ 43'\ 8''.49$
b	$-5''.17$	$-5''.17$
φ	$38^0\ 43'\ 4''.03$	$38^0\ 42'\ 3''.32$

	Fio XII	Fio XIII
2τ	$48^m\ 37^s.61$	$50^m\ 31^s.29$
$2\tau'$	$22^m\ 8^s.29$	$17^m\ 34^s.07$
τ	$24^m\ 18^s..0$	$25^m\ 15^s.64$
τ'	$11^m\ 4^s.14$	$8^m\ 47^s,03$
s	$17^m\ 41^s.47 = 4^0\ 25'\ 22''$	$17^m\ 1^s.31 = 4^0\ 15'\ 20''$
u	$6^m\ 37^s.33 = 1^0\ 39'\ 20''$	$8^m\ 14^s.30 = 2^0\ 3'\ 34''5$
log sec s	0,0012952	0,0011990
log sec u	0,0001813	0,0002807
log tg δ	$\bar{1},9025321$	$\bar{1},9025321$
log cos λ	$\bar{1},9999999$	$\bar{1},9999999$
log tg φ'	$\bar{1},9040085$	$\bar{1},9040117$
φ'	$8^s.17$	$8^s.96$
b	$-5''.17$	$-5''.17$
φ	$3''.00$	$3''.79$

$$\varphi = 38^0\ 43'\ 3''.53$$

Determinação dos êrros instrumentais quando as observações são feitas pelo método de Struve

21 — O êrro de nível b deduz-se das leituras do nível do eixo de rotação da luneta.

Para deduzir o valor do êrro de azimute a começa-se por calcular a longitude λ do meridiano do instrumento, sendo, como anteriormente referimos: [§ 9]

$$a = \lambda \operatorname{sen} \varphi$$

O cálculo de λ faz-se pela fórmula (14), devendo para isso calcular-se as semi-somas dos tempos da passagem da estrela, sôbre cada fio, nas duas posições do instrumento.

Obtem-se assim uma série de valores, pouco diferentes, dos tempos da passagem da estrêla sôbre o meridiano do instrumento, correspondendo a cada fio dois valores dêsse tempo, um para a posição luz a N e outro para a posição luz a S.

Designemos por H a média dêsses valores e por $\Delta\vartheta$ a correcção da pêndula quando marcava o tempo H. Se a inclinação do eixo de rotação do instrumento quando se observou a passagem W da estrêla, fôsse a mesma que tinha quando se observou a passagem E seria:

$$\lambda = H + \Delta\vartheta - \alpha$$

Suponhamos que a inclinação, dada pelo nível, quando se fizeram as observações da passagem E era b passando a ser b' nas observações da passagem W.

A média dos tempos das passagens E e W sôbre o mesmo fio, numa das posições do aparelho não é o tempo da passagem no meridiano do instrumento como se conclui da análise feita no § 5.

Em virtude da inclinação b é necessário introduzir no tempo θ da passagem E a correcção:

$$-\frac{b}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} z}$$

e, para a passagem W, a inclinação b' exige que se faça no tempo θ' a correcção:

$$\frac{b'}{\operatorname{sen} \varphi \operatorname{tg} z}$$

Na média, $\frac{\theta + \theta'}{2}$, é necessário introduzir, portanto, a correcção:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b' - b}{\text{sen } \varphi \text{ tg } z}$$

que, atendendo às expressões de sen z e de cos z do § 1, se pode escrever:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{(b' - b) \text{ sen } \delta.}{\text{sen } \varphi \sqrt{\text{sen } (\varphi + \delta) \text{ sen } (\varphi - \delta)}}$$

O valor de λ será portanto:

$$\lambda = H + \Delta\theta + \Delta H - \alpha$$

onde a correcção ΔH é, em segundos de tempo:

$$\Delta H = \frac{(b' - b) \text{ sen } \delta}{30 \text{ sen } \varphi \sqrt{\text{sen } (\varphi + \delta) \text{ sen } (\varphi - \delta)}} = (b' - b) \mathcal{H} \text{ (1)}$$

Para facilitar o cálculo de ΔH pode organizar-se uma tabela que, como a que se segue, dê para as diferentes declinações o valor do factor $\mathcal{H}$ que se deve multiplicar por $b' - b$.

---

(1) — É interessante notar que o acréscimo Δt que resulta para a ângulo horário da estrêla, na sua passagem, em virtude do êrro de nível ter experimentado o acréscimo $\Delta b = b' - b$, que é como vimos $\frac{\Delta b}{\text{sen } \varphi \text{ tg } z}$, é o mesmo que o que resultaria de uma variação igual de latitude.

Com efeito, diferenciando (1) tem-se:

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta\varphi \text{ tg } \delta}{\text{sen}^2 \varphi \text{ sen } t}$$

e como sen z = cos δ sent e cos z = $\frac{\text{sen } \delta}{\text{sen } \varphi}$ será:

$$\Delta t = \frac{\Delta\varphi}{\text{sen } \varphi \text{ gz}}$$

TABELA IV

Valores de $\mathcal{H}$ para $\varphi = 38^\circ\ 43'$

δ	$\mathcal{H}$	δ	$\mathcal{H}$
38° 38′	0.88	37° 50′	0.27
36	0.75	45	0.26
34	0.66	40	0.25
32	0.60	35	0.24
30	0.55	30	0.23
25	0,47	20	0.22
20	0,41	10	0.21
15	0,37	0	0.20
10	0.34	36 50	0.19
5	0.32	40	0.18
0	0.30	30	0.17
37° 55	0.29	20	0.17

Para determinar a constante de colimação de cada um dos fios basta subtrair, membro a membro, as igualdades (38), o que dá:

$$2 \operatorname{sen} c = \cos n \cos \delta \, (\cos \tau - \cos \tau')$$

Atendendo a que, por ser b muito pequeno, é:

$$\cos n = \operatorname{sen} \varphi$$

teremos:

$$\operatorname{sen} c = -\operatorname{sen} \varphi \cos \delta \operatorname{sen} \frac{\tau + \tau'}{2} \operatorname{sen} \frac{\tau - \tau'}{2}$$

fórmula que permite deduzir a distancia c de cada fio ao plano de colimação.

Determinação das declinações das estrêlas observando as suas passagens no primeiro vertical

22 — As observações são feitas, em geral, pelo método de Struve, isto é as passagens E e W da estrêla são observadas nas duas posições do instrumento.

As fórmulas (39) do § 19 podem escrever-se com a forma:

$$(40)\ldots \qquad \begin{aligned} \operatorname{tg} \delta &= \operatorname{tg} \varphi' \cos s \cos u \sec \lambda \\ \varphi' &= \varphi - b \end{aligned}$$

e permitem, conhecida a latitude do lugar φ, calcular δ.

Dos tempos das passagens da estrêla sôbre um fio deduzem-se 2τ e $2\tau'$ e portanto:

$$s = \frac{\tau + \tau'}{2} \qquad u = \frac{\tau - \tau'}{2}$$

e o valor de λ pode determinar-se, com todo o rigor, pelo método que indicámos no § anterior.

Das observações de passagens da estrêla sôbre cada um dos fios resulta, como vemos, um valor da declinação da estrêla.

23 — Se os erros instrumentais *a*, *b* e *c* fôssem nulos teríamos:

$$\lambda = 0 \qquad \tau = \tau' = t$$

designando por *t* o ângulo horário da estrêla na passagem W e as igualdades (40) reduzir-se-iam a:

$$\operatorname{tg} \delta = \operatorname{tg} \varphi \cos t$$

que é a fórmula (1).

Para apreciarmos a influência que um êrro, que se cometa na determinação dos instantes das passagens, tem no valor que se deduz para δ notemos que da igualdade anterior, supondo φ constante, vem:

$$d\delta = -\cos^2 \delta \operatorname{tg} \varphi \operatorname{sen} t \, dt = -\frac{1}{2} \operatorname{sen} 2\delta \operatorname{tg} t \, dt$$

que nos mostra que o êrro $d\delta$ é, para o mesmo dt, tanto menor quanto menor for *t* o que torna o método mais indicado para a determinação das declinações de estrêlas que culminem próximo do zenite.

Um êrro no valor de φ que serve no cálculo de δ conduz a um êrro:

$$d\delta = \frac{\operatorname{sen} 2\delta}{\operatorname{sen} 2\varphi} \, d\varphi$$

que para essas estrêlas é pràticamente igual a $d\varphi$.

24 — Em vez de calcular a declinação por meio das fórmulas (40) é preferível calcular um valor provisório δ' de δ pela fórmula:

$$\operatorname{tg} \delta' = \operatorname{tg} \varphi \cos s \cos u$$

corrigindo-o depois dos êrros que o afectam por terem sido desprezados os efeitos dos êrros de nível e de azimute.

Designando por δ_1 o valor que se obteria pela fórmula:

$$\operatorname{tg} \delta_1 = \operatorname{tg} \varphi' \cos s \cos u$$

teremos, evidentemente:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_1}{\operatorname{tg}\delta'} = \frac{\operatorname{tg}\varphi'}{\operatorname{tg}\varphi} \text{ e, portanto:}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\delta_1 - \operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}\varphi' - \operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\delta_1 + \operatorname{tg}\delta'}{\operatorname{tg}\varphi' + \operatorname{tg}\varphi}$$

que, desembaraçando de denominadores e multiplicando por cos φ cos φ_1 cos δ_1 cos δ', se pode escrever:

$$\operatorname{sen}(\delta_1 - \delta') = \operatorname{sen}(\varphi' - \varphi)\frac{\operatorname{sen}(\delta_1 + \delta')}{\operatorname{sen}(\varphi + \varphi')}$$

Sendo muito pequeno o êrro de nível b, teremos, com suficiente rigor:

$$\delta_1 - \delta' = -b\,\frac{\operatorname{sen} 2\,\delta'}{\operatorname{sen} 2\,\varphi}$$

isto é, a correcção $\Delta_1\delta$ a introduzir no valor de δ', para atender ao êrro de nível, é:

$$\Delta_1\delta = -b\,\frac{\operatorname{sen} 2\,\delta'}{\operatorname{sen} 2\,\varphi}$$

Designemos agora por δ o valor que se deduziria aplicando a fórmula (40); será:

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \operatorname{tg}\delta\cos\lambda$$

e como λ é muito pequeno, poderemos, repetindo o raciocínio que se fêz no § 9, (sôbre a expressão $\operatorname{tg}\varphi' = \operatorname{tg}\varphi_1\cos\lambda$) concluir que a correcção $\Delta_2\delta$ a introduzir no valor de δ, para atender ao êrro de azimute, é:

$$\Delta_2\,\delta = \delta - \delta_1 = \frac{\lambda^2}{4}\operatorname{sen} 1'' \operatorname{sen} 2\,\delta$$

As fórmulas a aplicar são então:

$$(41)\ldots \quad \begin{cases} s = \dfrac{\tau + \tau'}{2} \qquad u = \dfrac{\tau - \tau'}{2} \\ \operatorname{tg}\delta' = \operatorname{tg}\varphi\cos s\cos u \\ \Delta_1\delta = -b\,\dfrac{\operatorname{sen} 2\,\delta'}{\operatorname{sen} 2\,\varphi} \\ \Delta_2\,\delta = \dfrac{\lambda^2}{4}\operatorname{sen} 1''\operatorname{sen} 2\,\delta \\ \delta = \delta' + \Delta_1\delta + \Delta_2\,\delta \end{cases}$$

podendo a sua aplicação facilitar-se recorrendo a tabelas que dêem os valores das correcções $\Delta_1\delta$ e $\Delta_2\,\delta$.

Para calcular os valores de $\Delta_1 \delta$ é aconselhável preparar uma tabela que dê, para cada valor de δ', o valor de:

$$\frac{1 \text{ divisão de nível}}{2n} \quad \frac{\text{sen } 2\,\delta'}{\text{sen } 2\,\varphi}$$

sendo n o número de leituras que se fazem no nível ($\frac{n}{2}$ na posição luz a N e $\frac{n}{2}$ na posição luz a S).

Se o zero da graduação do nível está num dos extremos o valor de $\Delta_1 \delta$ obtem-se, evidentemente, multiplicando o número que se deduz da tabela pela diferença entre a soma das leituras feitas no nível quando a sua graduação cresce para N e a soma das leituras feitas na outra posição.

A tabela V dá os valores de $\Delta_2 \delta$ que correspondem aos diferentes valores de λ e δ.

TABELA V

Valores de $\Delta_2 \delta$

δ \ λ	1s	2s	3s	4s	5s
+ 38° 35′	0″.000	0″.001	0″.002	0″.004	0″.007
25	000	1	2	4	7
15	000	1	2	4	7
5	000	1	2	4	7
37° 55	000	1	2	4	7
45	000	1	2	4	7
35	000	1	2	4	7
25	000	1	2	4	7
15	000	1	2	4	7
5	000	1	2	4	7
37° 00	000	1	2	4	7

δ \ λ	6s	7s	8s	9s	10s
+ 38° 35′	0″.010	0″.013	0″.017	0″.022	0″.027
25	10	13	17	22	27
15	10	13	17	22	26
5	10	13	17	21	26
37° 55	10	13	17	21	26
45	10	13	17	21	26
35	10	13	17	21	26
25	10	13	17	21	26
15	10	13	17	21	26
5	10	13	17	21	26
37° 00	10	13	17	21	26

25 — Tem-se suposto até agora que o êrro de azimute é o mesmo nas passagens E e W da estrêla. Quando tal não acontece pode-se atender à influência de uma variação Δa que tenha experimentado êsse êrro instrumental.

Supunhamos que é a o êrro de azimute na passagem E da estrêla e $a' = a + \Delta a$ o mesmo êrro instrumental na passagem W.

As correcções a introduzir, nos tempos 0 e $0'$ das passagens, para atender a estes êrros são respectivamente [§ 6]:

$$-\frac{a}{\operatorname{sen}\varphi} \quad \text{e} \quad -\frac{a+\Delta a}{\operatorname{sen}\varphi}$$

As correcções a fazer nos intervalos de tempo decorridos entre as duas passagens são, portanto, iguais a $-\frac{\Delta a}{\operatorname{sen}\varphi}$ precisando o valor de s que se usa em (40), ser corrigido de $-\frac{\Delta a}{2\operatorname{sen}\varphi}$.

A influência da variação Δa de azimute é, portanto, a mesma que a de $-\frac{\Delta a}{2\operatorname{sen}\varphi}$ em s ou, o que é pràticamente o mesmo, é a que resultaria da variação $-\frac{\Delta a}{2\operatorname{sen}\varphi}$ no ângulo horário da estrêla.

Mas a influência que um êrro em t tem no valor de δ obtem-se diferenciando (1) e é portanto dada por:

$$d\delta = -\cos^2\delta \operatorname{tg}\varphi \operatorname{sent} dt$$

A correcção a introduzir no valor de δ para atender à variação Δa de azimute é portanto, tendo em vista a expressão de sent do § 1:

$$\Delta_3\delta = \frac{\cos\delta\sqrt{\operatorname{sen}(\varphi+\delta)\operatorname{sen}(\varphi-\delta)}}{\operatorname{sen} 2\varphi}\Delta a$$

A influência da variação do azimute é grande como se reconhece na tabela seguinte que dá para a latitude de Lisboa, para $\Delta a = 1''$ e para os diferentes valores de δ o valor de $\Delta_3\delta$.

TABELA VI

Valores de $\Delta_2 \delta$ para $\Delta a = 1''$

δ	$\Delta_2 \delta$	δ	$\Delta_2 \delta$
38° 43′	0″.000	38° 00′	0″.089
38° 38′	0″.030	37° 60′	0″.117
38° 30′	0″.049	37° 00′	0″.139
38° 20′	0″.065	36° 50′	0″.159
38° 10′	0″.078		

Por isso, nas observações feitas para determinar a declinação de estrêlas é necessário estudar cuidadosamente as variações de azimute do instrumento.

26 — As passagens, sôbre os fios fixos, das estrêlas que culminam muito próximo do zenite, isto é, cujas declinações são muito próximas da latitude do lugar não podem ser observadas pelo método que referimos anteriormente. Deslocando-se muito pouco na direcção N S, as estrêlas não atingem, do lado S, os fios que, antes da inversão, foram observados a N do primeiro vertical.

Recorre-se então ao fio móvel do micrómetro que permite, subdividindo muito os intervalos entre os fios fixos, observar as passagens sôbre o fio móvel colocado em posições tão próximas do fio do meio quanto fôr necessário.

Observando as quatro passagens sôbre o fio móvel, na posição que corresponde à mesma leitura do micrómetro, segue-se o método que foi usado pela primeira vez pelo falecido director do Observatório Astronómico de Lisboa, Frederico Augusto Oom, e a redução das observações faz-se como se tivessem sido usados fios fixos.

As observações podem porém fazer-se colocando sucessivamente o fio móvel um pouco à frente da estrêla e registando além dos tempos de passagem as leituras correspondentes do micrómetro.

O cálculo da declinação é então feito pelo processo que vamos referir.

Designemos por M uma leitura do micrómetro que tomamos para origem e suponhamos, por exemplo, que, na posição do instrumento luz a S, as leituras do micrómetro crescem quando o fio móvel se desloca para N.

Seja M + c a leitura que se faria quando o fio móvel estivesse sôbre o plano de colimação. (1)

(1) Como se vê, *c* é a colimação do fio móvel, expressa em divisões do tambor, quando a leitura no micrómetro é M e o instrumento está na posição luz a N.

A colimação do fio móvel (expressa em divisões do micrómetro) quando a leitura do tambor fôr *m* é:

$$m - (M + c) \quad \text{para a posição luz a S.}$$

$$M + c - m \quad \text{para a posição luz a N.}$$

Supondo nulos os erros de azimute e de nível teremos:

$$n = 90^\circ - \varphi \qquad \lambda = 0$$

e portanto para uma observação, na posição luz a S, em que *m* é a leitura do micrómetro será:

$$\operatorname{sen}(m - M - c) = -\cos\varphi \operatorname{sen}\delta + \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \cos t$$

Substituindo $\cos t$ por $1 - 2\operatorname{sen}^2 \frac{t}{2}$ e atendendo a que $\varphi - \delta$ é $m - M - c$ são muito pequenos será:

$$m - M - c = \varphi - \delta - \frac{2}{\operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen}\varphi \cos\delta \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$$

$$= \varphi - \delta - k \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$$

onde, evidentemente, se supõe $m - M - c$ reduzido a segundos de arco.

Sendo nulos os erros instrumentais de nível e de azimute esta expressão permite calcular o valor de δ com um erro igual a *c* visto que o último termo do segundo membro se pode calcular a partir do valor do angulo horário da estrela que, por sua vez, se deduz do tempo da passagem e da ascensão recta.

Uma outra observação que se faça na posição do instrumento luz a N conduz a um valor de δ cujo erro é $-c$ e, portanto. a média dos dois valores não vem afectada dêste erro. Com efeito, para essa observação ter-se-há:

$$M + c - m = \varphi - \delta - k \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$$

Designando por *z* a distância zenital da estrêla na sua passagem meridiana e, como se costuma fazer na prática, por R o valor do termo $k \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t$, por *e* a diferença $M - m$ para a posição luz a S e por e' a diferença $m - M$ para a posição luz a N teremos, para a primeira observação:

$$z + c = R - e$$

e para a segunda:

$$z - c = R - e'$$

e, portanto, a média dos dois valores $R - e$ e $R - e'$ dará z.

A declinação da estrêla é:

$$\delta = \varphi - z$$

Para calcular R existem tabelas que dão o valor de $\log \frac{2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} t}{\operatorname{sen} 1''}$ (1)

Para atender à influência dos erros de nível e de azimute procede-se como nas observações em que se usam os fios fixos.

Determinação da constante de aberração anual, das paralaxes das estrêlas e da constante de nutação

27 — O movimento que um ponto da terra tem, em relação ao sistema de referência formado por três eixos com a origem no centro de gravidade do sistema solar e passando por três estrêlas fixas da esfera celeste, determina que a direcção que se dá ao eixo óptico de uma luneta, para observar um astro, seja diferente da que se daria se êsse ponto de observação estivesse imóvel.

Se supuzermos que se observa uma estrêla e supuzermos esta fixa em relação ao sistema de referência a direcção do eixo óptico da luneta é a da resultante do vector que representa a velocidade do ponto de observação e do vector que representa a velocidade do raio de luz que, provindo da estrêla, atinge a objectiva da luneta; o ângulo da direcção dêste raio de luz com a do eixo óptico chama-se, como se sabe, aberração das estrêlas fixas.

É costume considerar em separado o efeito dos dois principais movimentos de que está animada a terra; o movimento de rotação em tôrno da linha dos polos dá lugar à chamada aberração diurna e o movimento de translação em tôrno do sol dá lugar à aberração anual.

Em qualquer dos casos o astro situado na direcção B'M' seria observado como se estivesse na direcção B'M sendo BB' e AB proporcionais às grandezas das velocidades v do ponto de observação e V da luz.

---

(1) Chauvenet, tabela VI, 2.° vol.

Sendo B_1 o ponto da esfera celeste de que o observador se aproxima no instante da observação, a aberração determina que o astro seja visto numa direcção B'M mais afastada do que B'M' de $B'B_1$ e a aberração, determinada pelo ângulo:

$$d\gamma = \gamma - \gamma'$$

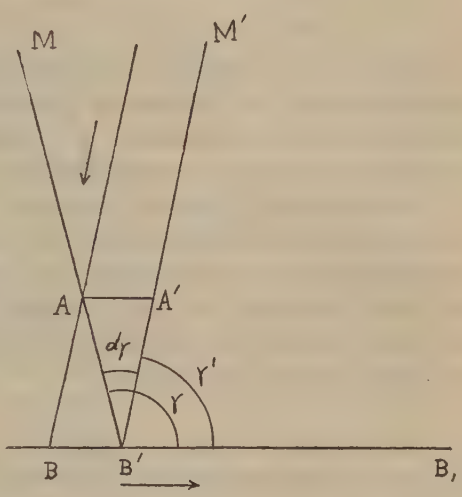
é, como se conclui do triângulo AA'B, em segundos de arco:

$$d\gamma = \frac{v}{V \operatorname{sen} 1''} \operatorname{sen} \gamma'$$

Quando se trata da aberração diurna $\frac{v}{V \operatorname{sen} 1''}$ é constante para os lugares que têm a mesma latitude.

Para o equador essa constante é 0''.311 e para um lugar de latitude φ é 0''.311 cos φ.

Quando se trata da aberração anual, tendo em atenção que a órbita da terra é elitica e que o seu movimento sôbre a trajectória se executa de modo que o raio vector descreve áreas iguais em tempos iguais é, como se sabe:



$$\frac{v}{V \operatorname{sen} 1''} = \frac{1}{V \operatorname{sen} 1''} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{2\pi}{T} (1 + e \cos u) \sec i$$

designando por a e por e o semi-eixo maior e a excentricidade da órbita, por T o período do movimento elítico, por u a anomalia verdadeira do nosso planeta no instante da observação e por i a diferença entre 90° e o ângulo que a tangente à órbita na posição ocupada pelo observador faz com o raio vector correspondente.

Desprezando os termos periódicos (1 + e cos u) e sec i, sempre muito próximos da unidade, costuma designar-se por constante de aberração anual o número:

$$k = \frac{1}{V \operatorname{sen} 1''} \cdot \frac{a}{\sqrt{1 - e^2}} \cdot \frac{2\pi}{T}$$

Como se vê o valor desta constante pode deduzir-se do valor da ve-

locidade da luz, sendo porém preferível determiná-la por observação dos deslocamentos aparentes das estrêlas, determinados pela mudança de direcção da velocidade do observador.

Calculando os efeitos da aberração anual sôbre a ascensão recta e a declinação de uma estrêla deduzem-se as conhecidas fórmulas:

$$\alpha' - \alpha = -k \sec \delta \, (\cos \Theta \cos \varepsilon \cos \alpha + \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \alpha) \qquad \ldots(41)$$

$$\delta' - \delta = -k \cos \Theta \, (\operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha)$$

$$- k \operatorname{sen} \Theta \operatorname{sen} \delta \cos \alpha$$

em que α' e δ designam a ascensão recta e a declinação que a estrêla tem, aparentemente, em virtude da aberração, α e δ designam os verdadeiros valores destas coordenadas, k a constante de aberração, Θ a longitude verdadeira do sol e ε a obliqüidade da eclitica.

Estas fórmulas que se deduzem supondo que a órbita da terra é circular poderiam transformar-se para atender à sua forma elítica. Essa transformação faz aparecer termos correctivos que, para as estrêlas, além de muito pequenos, são pràticamente constantes durante um longo período de tempo, sendo por isso preferível considerar êsses termos na definição da posição média da estrêla.

28 — Para deduzir o valor de k, determinando pela observação os valores que tomam as ascensões rectas ou as declinações das mesmas estrêlas em épocas diferentes, é indispensável ter em conta que outras causas como a precessão, os movimentos próprios, a paralaxe anual, a nutação e as variações de latitude produzem também variações dessas coordenadas.

Estudando o movimento de rotação da terra tendo em atenção as perturbações que são determinadas pelas atracções dos outros astros do sistema solar podem estabelecer-se fórmulas que determinam os efeitos que a precessão e a nutação teem nas coordenadas das estrêlas.

Nessas fórmulas figuram coeficientes que dependem dos elementos das órbitas da terra e da lua, da distribuição das massas no interior do nosso planeta, da massa da lua, etc.; êsses coeficientes teem sido determinados indirectamente por observações astronómicas.

Dispõe-se portanto de fórmulas que permitem determinar as variações de ascenção recta e de declinação que são devidas aos movimentos de precessão e de nutação.

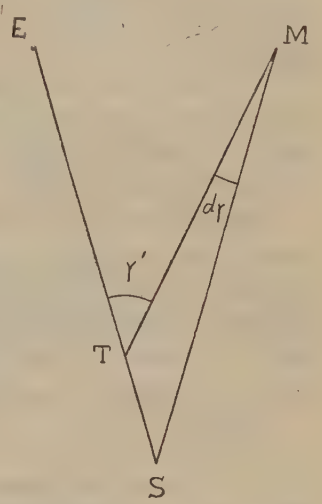
Os catálogos de estrêlas indicam os movimentos próprios anuais

das estrêlas em ascensão recta e declinação; as variações destas coordenadas calculam-se pràticamente supondo-as proporcionais ao tempo.

O movimento de translação da terra em torno do sol, alterando a posição do observador determina que a mesma estrêla seja observada durante o ano em direções diferentes. Estas mudanças de posição da estrêla, que, por assim dizer, determinam a distância que a separa da terra, costumam calcular-se a partir do valor da paralaxe heliocêntrica.

Entende-se por paralaxe heliocêntrica ou paralaxe anual de uma estrêla o deslocamento que a estrêla teria, na esfera celeste, se fôsse observada do sol e não da terra.

Este deslocamento é nulo quando a direcção do raio vector da terra, na órbita do seu movimento em relação ao sol, contem a estrêla e, desprezando a excentricidade da órbita, é máximo quando o ângulo das direcções terra-estrêla e terra-sol é 90°.



A êste valor máximo do ângulo que, da estrêla subtende a distância média da terra ao sol chama-se constante de paralaxe anual da estrêla ou simplesmente paralaxe anual.

Suponhamos que o plano da figura é o plano que contém as posições que num certo instante teem a terra T, o sol S e a estrêla M; seja E o ponto em que a semi-recta S T corta a esfera celeste.

Designando por γ' o ângulo STE, por Δ a distância da estrêla ao sol e por r a distância da terra ao sol, a paralaxe heliocêntrica da estrêla no instante considerado, determinada pelo ângulo $d\gamma$, é, em segundos de arco, dada por:

$$d\gamma = \frac{r}{\Delta} \frac{\operatorname{sen} \gamma'}{\operatorname{sen} 1''}$$

Tomando para unidade de comprimento o semi-eixo maior a da órbita da terra, a constante de paralaxe anual p, que corresponde a $\gamma' = 90°$ e a $r = a = 1$, será:

$$p = \frac{1}{\Delta \operatorname{sen} 1''}$$

e portanto:

$$d\gamma = r\, p \operatorname{sen} \gamma'$$

Calculando os efeitos da paralaxe anual sôbre a ascensão recta e a declinação de uma estrêla deduzem-se as fórmulas:

$$\alpha' - \alpha = -p\ r \sec \delta\ (\cos \Theta \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \Theta \cos \varepsilon \cos \alpha)$$

$$\delta' - \delta = -p\ r \operatorname{sen} \Theta\ (\cos \varepsilon \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta) -$$

$$- p\ r \cos \Theta \operatorname{sen} \delta \cos \alpha$$

onde α' e δ' designam a ascenção recta e a declinação da estrêla, α e δ a ascensão recta e a declinação heliocêntricas, Θ a longitude celeste do sol e ε a obliqüidade da eclitica.

29 — Reconheceu-se já que, por observações de passagens de estrêlas no primeiro vertical, se podem deduzir valores muito exactos das declinações.

É agora fácil ver como se pode, determinando durante um ano, por exemplo, as variações de declinação das estrêlas, deduzir o valor da constante de aberração anual e os das constantes de paralaxe heliocêntrica das estrêlas observadas.

Designemos por δ o valor da declinação da estrêla, calculado por forma a ter em conta os efeitos da precessão, da nutação e do movimento próprio, por $\Delta\delta$ a correcção a introduzir neste valor, por δ' o valor da declinação determinado pela observação, por k o valor atribuído à constante de aberração anual, por Δk a correcção a introduzir nesse valor e por p a constante de paralaxe anual da estrêla.

Será:

$$\delta' = \delta + \Delta\delta + (k + \Delta k)\ [\ (\operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha) \cos \Theta + \operatorname{sen} \delta \cos \alpha \operatorname{sen} \Theta] -$$

$$- p\ r\ (\cos \varepsilon \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta) \operatorname{sen} \Theta - p\ r \cos \Theta \operatorname{sen} \delta \cos \alpha$$

Introduzindo as grandezas auxiliares m e M defenidas pelas igualdades:

$$\operatorname{sen} \delta \cos \alpha = m \operatorname{sen} M$$

$$\operatorname{sen} \varepsilon \cos \delta - \cos \varepsilon \operatorname{sen} \delta \operatorname{sen} \alpha = m \cos M$$

vem:

$$\delta' = \delta + \Delta\delta - (k + \Delta k)\ m \cos (\Theta - M) + p\ r \operatorname{sen} (\Theta - M) \quad \ldots\ (42)$$

que, fazendo:

$$n = \delta + ak - \delta'$$

$$a = -m \cos (\Theta - M)$$

$$b = r\ m \operatorname{sen} (\Theta - M)$$

se pode ainda escrever:

$$a \Delta k\, b + p + \Delta\delta + n = 0 \quad \ldots\ (43)$$

Cada observação conduz a uma equação desta forma, podendo deduzir-se, pelo método dos mínimos quadrados os valores mais prováveis de Δk, p e $\Delta\delta$.

30 — Desde Setembro de 1840 até ao final do ano de 1842, W. Struve fêz numerosas observações de passagens no primeiro vertical com o fim de estabelecer o valor da constante de aberração anual, tendo obtido como resultado 20″,4451 com o êrro provável de 0″,0111 e por isso, na memória que apresentou à Academia Imperial de Sciências de S. Petersburgo, afirmou-se convencido de que, até essa época, nenhum elemento astronómico fora determinado com tanta precisão.

Observou, no primeiro vertical, passagens de sete estrêlas, de declinações próximas da latitude do Observatório de Poulkova, efectuando maior número de observações quando os efeitos da aberração em declinação são máximos ou mínimos.

Struve fêz as correcções devidas ao movimento de nutação pela fórmula de Peters, atribuiu a k o valor 20″,50 e desprezou as paralaxes, ficando, ficando, portanto, cada uma das equações da forma (43) com as duas incógnitas $\Delta\delta$ e $\Delta\kappa$.

Não julgando as observações suficientes para determinar as paralaxes, mostrou contudo, partindo de que a paralaxe de qualquer das sete estrêlas usadas era inferior a 0″,1, que o desprêzo que fêz não poderia determinar no valor de $\Delta\kappa$ um êrro maior que 0″,006.

O Sr. George Hill, do Observatório Naval de Washington, fêz, no primeiro vertical, desde 1893 a 1912 a mais completa série de observações que conhecemos.

Das observações da α Lyrae, feitas nos dezanove anos, deduziu 1867 valores da declinação dessa estrêla e além do estudo do seu movimento próprio em declinação, determinou, pelo método que indicámos, os valores da constante de aberração e da paralaxe anual.

Os resultados obtidos foram:

$$k = 20'',5800 \pm 0'',0113$$

$$p = 0'',1226 \pm 0'',0293$$

A-pesar-de os movimentos do polo sôbre a superfície da terra determinarem variações muito pequenas nas declinações, essas variações podem prejudicar a exatidão dos valores deduzidos para k e p; as declinações observadas foram, por isso, corrigidas já do efeito das variações de latitude para o que serviram as publicações da Associação Geodésica

Internacional e os relatórios publicados anualmente pelas Astronomische Nachrichten.

O estudo que se tem feito do complicado problema das variações de latitude ainda não permite atender com segurança aos seus efeitos e por isso conviria usar métodos de cálculo que eliminassem os efeitos de imperfeita correcção das declinações.

De 1904 a 1912 o sr. Hill fez observações com o fim de empregar o método sugerido pelo Dr. F. Küstner, do Observatório de Berlim, no artigo das Astronomische Nachrichten intitulado «Zur Bestimmung der Aberrations - Constante aus Meridian - Zenithdistanzen unabhängig von den Schwankungen der Polhöhe».

Conforme afirma êsse astrónomo as variações de latitude não devem conduzir a renunciar ao método de determinação da constante de aberração a partir dos valores de $\varphi - \delta$ das estrêlas zenitais; basta fazer o cálculo de modo a formar sempre as diferenças:

$$\Delta_{12} = \varphi - \delta_2 - (\varphi - \delta_1) = \delta_1 - \delta_2$$

que resultam de observações seguidas de duas estrêlas S_1 e S_2.

Estas diferenças são independentes da latitude de momento.

As observações dêsses nove anos foram feitas sôbre dezasseis estrêlas, tôdas culminando próximo do zenite, escolhidas de modo a formarem quatro grupos, sendo as ascensões rectas das estrêlas de cada grupo próximas de 6, 14, 18 e 22 horas.

Em cada noite foram observadas as passagens das estrêlas de dois grupos consecutivos, considerando o primeiro grupo consecutivo do quarto.

Das observações deduziram-se as declinações das estrêlas, afectadas portanto pela aberração anual, tendo-se passado dêsse sistema de valores da declinação para valores da latitude da estação de observação.

No cálculo da constante de aberração serviram as diferenças das equações que dão os valores da latitude e que resultaram das observações dos grupos feitos na mesma noite; nas igualdades assim formadas desaparecem quaisquer erros constantes que estejam afectando a latitude. Só uma variação de latitude que se desse em muito curto intervalo de tempo viria prejudicar a exactidão dos resultados.

O valor da constante de aberração a que chegou o sr. Hill foi:

$$k = 20''.542 \pm 0''.010$$

31 — O movimento de nutação determina que a posição verdadeira do polo do equador se desloque em tôrno da sua posição média.

Se não existisse o movimento de precessão o polo verdadeiro em

virtude da nutação descreveria sôbre a esfera celeste, em tôrno do polo médio, uma elipse cujos eixos mediriam 18″.5 e 13″.7, sendo o eixo maior dirigido para o polo da eclítica.

O período dêste movimento é proximamente 18 $^2/_3$ anos, tempo em que o nodo ascendente da órbita da lua executa uma revolução completa sôbre a eclítica.

O movimento periódico de nutação determina variações periódicas da obliqüidade da eclítica e deslocamentos periódicos do equinócio que se costumam designar por nutação da obliqüidade da eclítica e por nutação do equinócio em longitude ou equação dos equinócios.

O movimento de nutação determina portanto variações das ascensões rectas e das declinações das estrêlas; se designarmos por δ a declinação média de uma estrêla num dado instante e por δ' a sua declinação verdadeira, será, para o ano de 1800, servindo-nos dos valores de Peters:

$$\begin{aligned}\delta' - \delta = &-6''.8650 \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega + 9''.2231 \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega + \\ &+ 0''.0825 \cos\alpha \operatorname{sen} 2\Omega - 0''.0897 \operatorname{sen}\alpha \cos 2\Omega - \\ &- 0''.0813 \cos\alpha \operatorname{sen} 2\mathbb{C} + 0''.0886 \operatorname{sen}\alpha \cos 2\mathbb{C} + \\ &+ 0''.0270 \cos\alpha \operatorname{sen}(\mathbb{C} - \Gamma') - \\ &- 0''.5055 \cos\alpha \operatorname{sen} 2\Theta + 0''.5510 \operatorname{sen}\alpha \cos 2\Theta + \\ &+ 0''.0509 \cos\alpha \operatorname{sen}(\Theta - \Gamma) - \\ &- 0''.0085 \cos\alpha \operatorname{sen}(\Theta + \Gamma) + 0''.0093 \operatorname{sen}\alpha \cos(\Theta + \Gamma)\end{aligned}$$

designando por Ω a longitude do nodo ascendente da órbita da lua referida à posição do equinócio médio, por $\mathbb{C}$ a longitude verdadeira da lua, por Θ a longitude verdadeira do sol, por Γ a longitude verdadeira do perigeu do sol e por Γ' a longitude verdadeira do perigeu da lua.

O coeficiente do termo em $\cos\alpha \cos\Omega$ chama-se constante de nutação.

No estudo da nutação conclue-se que, se existir um êrro $\Delta\nu$ no valor dêsse coeficiente, que representaremos por ν, os coeficientes dos termos em $\cos\alpha \operatorname{sen}\Omega$, em $\cos\alpha \operatorname{sen} 2\Omega$, em $\operatorname{sen}\alpha \cos 2\Omega$, em $\cos\alpha \operatorname{sen} 2\mathbb{C}$, em $\operatorname{sen}\alpha \cos 2\mathbb{C}$ e em $\cos\alpha \operatorname{sen}(\mathbb{C} - \Gamma')$ estarão afectados de erros que manterão para os coeficientes correspondentes uma razão igual à que existe entre $\Delta\nu$ e ν, por outras palavras: êsses coeficientes formarão um sistema de números proporcionais ao coeficiente do termo em $\cos\alpha \cos\Omega$.

Além disso, os coeficientes dos cinco outros têrmos são afectados não só por um êrro que exista em ν mas ainda por um êrro que exista na constante de precessão ψ que é como se sabe o valor da precessão anual luni-solar.

Se designarmos por $\Delta\nu$ o êrro que existe em ν e introduzirmos as grandezas auxiliares i e ζ definidas pelas igualdades:

$$\nu + \Delta\nu = \nu\,(1 + i)$$

$$\nu + \Delta\nu = \nu\,(1 + \nu)$$

os coeficientes dos sete primeiros termos da expressão de $\delta' - \delta$ aparecem multiplicados por $(1 + i)$ e os dos cinco últimos por $(1 - 2.172\,i + 3.162\,\zeta)$.

É fácil agora compreender como, das observações, se pode deduzir o valor da constante de nutação.

Determinando as declinações de uma estrêla por observações feitas durante um período de tempo superior ao da revolução do nodo da órbita lunar deve notar-se que o efeito de qualquer pequeno êrro, que exista na constante de precessão, tem uma influência desprezível na média dos resultados das observações feitas durante um tão largo período de tempo, pois que o período dos principais termos em que influe ζ (os termos em 2Θ) têm um período de seis meses. Na determinação de ν pode então supôr-se $\zeta = 0$.

Desprezando na expressão de $\delta' - \delta$ os termos cujos coeficientes são muito pequenos, teremos então:

$$\begin{aligned}
\delta' - \delta &= (1 + i)\,(-6''.8650 \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega + 9''.2231 \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega) + \\
&\quad + (1 - 2.162\,i)\,(-0''.5055 \cos\alpha \operatorname{sen} 2\Theta + 0''.5510 \operatorname{sen}\alpha \cos 2\Theta) \\
&= -6''.8650 \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega + 9''.2231 \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega + \\
&\quad + 0''.5055 \cos\alpha \operatorname{sen} 2\Theta + 0''.5510 \operatorname{sen}\alpha \cos 2\Theta + \\
&\quad + \Delta\nu\,\left(-\frac{6''.850}{\nu} \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega + \frac{9''.2231}{\nu} \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2.162 \times 0''.5055}{\nu} \cos\alpha \operatorname{sen} 2\Theta - \frac{2.162 \times 0.5510}{\nu} \operatorname{sen}\alpha \cos 2\Theta\right)
\end{aligned}$$

Tomando $9''.2231$ para valor de ν, o coefeciente de $\Delta\nu$ na expressão de $\delta' - \delta$ reduz-se a:

$$\begin{aligned}
c &= -0{,}742 \cos\alpha \operatorname{sen}\Omega + 1.000 \operatorname{sen}\alpha \cos\Omega + \\
&\quad + 0.118 \cos\alpha \operatorname{sen} 2\Theta - 0{,}129 \operatorname{sen}\alpha \cos 2\Theta
\end{aligned}$$

Quando portanto formarmos as equações, análogas a (42), que correspondem a observações feitas durante o largo período de tempo que referimos e atendermos ao efeito da nutação, adoptando um valor para o

coeficiente ν, cometeremos erros que são iguais a $c\,\Delta\nu$. As equações, que resultam das observações, tomam então a forma:

$$a\,\Delta k + b\,p + \Delta\delta + c\,\Delta\nu + n = o$$

Das observações da α Lyræ, feitas pelo sr. Hill durante dezanove anos, período de tempo em que o nodo ascendente da órbita da lua teve um deslocamento total de 366°, foi deduzida a correcção $\Delta\nu$ a introduzir no valor da constante de nutação.

O resultado obtido foi:

$$\nu = 9''.2498$$

para o ano 1900.

Nas equações, que resultaram das observações, foram usados os valores da constante de aberração e da paralaxe que se deduziram no trabalho a que nos referimos no § 30 não figurando como incógnitas Δk e p; as observações foram também aproveitadas para corrigir, em declinação, o valor do movimento próprio da estrêla.

Lista de estrêlas ordenadas segundo as horas aproximadas das suas passagens no primeiro vertical de Lisboa

($\varphi = 38^\circ\ 43'\ N$)

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
A Tauri	4.50	4h 0m	21° 53′	36° 35′	0h 0m	E
β Trianguli	3.08	2 5	34 39	65 22	0 3	E
μ Andromedæ	3.90	0 52	38 6	80 35	0 4	E
δ Sagittæ	3.78	19 44	18 21	30 13	0 6	W
ε Tauri	3.63	4 24	19 1	31 24	0 6	E
β Sagittæ	4.45	19 38	17 18	28 23	0 7	W
32 Vulpeculæ	5.24	20 51	27 47	48 11	0 7	W
γ Sagittæ	3.71	19 56	19 18	31 54	0 12	W
ζ Cygni	3.40	21 10	29 56	52 55	0 14	W
ω Aquilæ	5.14	19 14	11 28	18 32	0 16	W
Φ¹ Orionis	4.53	5 31	9 27	15 13	0 19	E
11 Orionis	4.65	5 0	15 18	24 57	0 20	E
i Tauri	5.12	4 47	18 43	30 52	0 27	E
α Orionis	0,5 a 1,1	5 51	7 24	10 53	0 28	E
π Pegasi	4.38	22 7	32 50	60 6	0 33	W
p Tauri	5.55	4 6	26 18	45 6	0 38	E
τ Tauri	4.33	4 38	22 49	38 19	0 45	E
γ Aquilæ	2.80	19 43	10 26	16 50	0 51	W
μ Aquilæ	4.65	19 31	7 13	11 35	0 55	W
l Tauri	4.70	4 59	21 29	35 50	0 57	E
α Aquilæ (Altair)	0.89	19 47	8 40	13 57	1 3	W
ζ Persei	2.91	3 50	31 40	57 4	1 11	E
α Delphini	3.86	20 36	15 39	24 34	1 14	W
ν Orionis	4.40	6 3	14 47	24 5	1 20	E
β Delphini	3.72	20 34	14 21	23 20	1 20	W
γ^2 Delphini	4.49	20 43	15 52	25 55	1 20	W
β Aquilæ	3.90	19 52	6 13	9 58	1 21	W
δ Delphini	4.53	20 40	14 49	24 8	1 23	W
16 Pegasi	5.05	21 50	25 35	43 40	1 23	W
τ Aquilæ	5.65	20 1	7 4	11 21	1 25	W
15 Monocerotis	4.76	6 37	9 58	16 4	1 28	E
ζ Tauri	3.00	5 33	21 6	35 13	1 28	E
ε Delphini	3.98	20 30	11 3	17 52	1 33	W
1 Pegasi	4.27	21 19	19 30	32 15	1 34	W
η Pegasi	3.10	22 40	29 51	52 44	1 37	W
μ Andromedæ	3.90	0 52	38 6	80 35	1 40	W
i Pegasi	3.96	22 4	25 0	42 30	1 42	W

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
ξ Geminorum	3.40	6h 41m	12º 58′	20º 51′	1h 47m	E
σ Andromedæ	4.5	0 14	36 23	71 30	1 47	W
γ Geminorum	1.93	6 34	16 28	26 57	2 1	E
α Canis Minoris	0.48	7 36	5 25	8 41	2 3	E
β Canis Minoris	3.09	7 23	8 26	13 34	2 6	E
ξ Persei	4.05	3 54	35 35	68 29	2 7	E
1 Geminorum	4.30	6 0	23 16	39 10	2 10	E
β Tauri	1.78	5 22	28 33	49 50	2 13	E
ν Geminorum	4.06	6 25	20 16	33 38	2 15	E
β Pegasi	2.61	23 0	27 42	48 0	2 16	W
π Geminorum	3.3 a 4.2	6 11	22 32	37 47	2 16	E
72 Pegasi	5.21	23 30	30 56	55 16	2 16	W
μ Geminorum	3.19	6 19	22 33	37 49	2 24	E
i Aurigæ	2.90	4 52	33 3	60 41	2 29	E
μ Pegasi	3.67	22 47	24 13	40 59	2 30	W
51 Geminorum	5.31	7 9	16 17	26 38	2 34	E
λ Pegasi	4.14	22 43	23 11	39 0	2 34	W
ρ Persei	3.4 a 4.2	3 0	38 33	85 7	2 35	E
λ Geminorum	3.65	7 14	16 40	27 18	2 42	E
ζ Geminorum	3.7 a 4.1	7 0	20 41	34 23	2 52	E
ε Pegasi	2.54	21 41	9 33	14 23	2 52	W
20 Pegasi	5.66	21 58	12 47	20 43	2 52	W
π Andromedæ	4.47	0 33	33 19	61 25	2 53	W
χ Aurigæ	4.88	5 28	32 9	58 18	2 55	E
β Andromedæ	2.4	1 5	35 14	67 16	2 57	W
β Cancri	3.76	8 13	9 24	15 8	3 1	E
δ Hydræ	4.18	8 34	5 57	9 32	3 4	E
ε Geminorum	3.18	6 40	25 12	42 54	3 4	E
τ Pegasi	4.65	23 17	23 21	39 15	3 7	W
α Andromedæ	2.15	0 5	28 42	50 9	3 13	W
ν Pegasi	4.57	23 22	23 1	38 41	3 14	W
ε Hydræ	3.53	8 43	6 41	10 43	3 17	E
31 Pegasi	4.93	22 18	11 51	19 10	3 17	W
δ Geminorum	3.52	7 16	22 7	37 1	3 18	E
ζ Hydræ	3.30	8 52	6 13	9 58	3 23	E
ρ Persei	3.4 a 4.2	3 0	38 33	85 7	3 25	W
δ Andromedæ	3.49	0 35	30 28	54 10	3 26	W
θ Pegasi	3.70	22 7	5 51	9 23	3 38	W
ε Andromedæ	4.52	0 35	28 55	50 38	3 41	W
ζ′ Cancri	5.10	8 8	17 52	29 23	3 43	E
α Pegasi	2.57	23 1	14 49	24 8	3 44	W
ζ Pegasi	3.61	22 38	10 27	16 15	3 45	W

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
α Cancri	4.27	8h 55m	12° 8′	19° 38′	3h 57m	E
d^1 Cancri	5.88	8 19	18 34	30 36	3 58	E
k Geminorum	3.70	7 40	24 34	41 40	3 59	E
k Cancri	5.14	9 4	10 57	17 41	4 0	E
i Geminorum	3.89	7 21	27 57	48 32	4 7	E
β Trianguli	3.08	2 5	34 39	65 22	4 7	W
Φ Pegasi	5.23	23 49	18 43	30 52	4 9	W
τ Piscium	4.70	1 8	29 43	52 25	4 10	W
55 Pegasi	4.69	23 3	9 1	14 31	4 17	W
δ Cancri	4.73	8 41	18 25	30 20	4 19	E
o Leonis	3.76	9 37	10 13	16 28	4 19	E
π Cancri	5.52	8 29	20 41	34 23	4 21	E
70 Pegasi	4.67	23 25	12 22	20 1	4 22	W
ω^1 Cancri	5.88	7 57	25 35	43 40	4 24	E
Φ Geminorum	4.99	7 49	26 57	46 26	4 26	E
59 Pegasi	5.15	23 8	8 20	13 24	4 26	W
ξ Leonis	5.12	9 28	11 37	18 47	4 27	E
β Geminorum	1.21	7 41	28 12	49 4	4 29	E
ζ Andromedæ	4.30	0 43	23 53	40 20	4 29	W
μ Aurigæ	4.8	5 8	38 23	83 5	4 33	E
51 Geminorum	5.31	7 9	16 17	26 38	4 35	W
γ Cancri	4.73	8 39	21 44	36 18	4 38	E
π Leonis	4.89	9 56	8 23	13 29	4 38	E
θ Geminorum	3.64	6 48	34 3	63 32	4 38	E
θ Aurigæ	2.7	5 54	37 12	75 9	4 39	E
ν Piscium	4.67	1 15	26 53	46 19	4 39	W
χ Geminorum	5 04	7 59	28 0	48 38	4 45	E
ρ Geminorum	4.18	7 25	31 56	57 44	4 49	E
83 Cancri	6.60	9 15	18 1	29 38	4 51	E
α Trianguli	3.58	1 49	29 14	51 20	4 52	W
γ Pegasi	2.87	0 10	14 47	24 5	4 52	W
θ Piscium	4.45	23 24	5 59	9 36	4 54	W
α Geminorum	1.99	7 30	32 3	58 2	4 55	E
α Leonis (Regulus)	1.34	10 5	12 19	19 56	5 8	E
i Piscium	4.28	23 36	5 14	8 23	5 10	W
ρ Leonis	3.85	10 29	9 40	15 35	5 18	E
ω Piscium	4.03	23 56	6 28	10 23	5 22	W
η Leonis	3.58	10 3	17 7	28 4	5 33	E
i Cancri	4.20	8 42	29 1	50 51	5 37	E
χ Leonis	4.66	11 1	7 43	12 24	5 40	E
ε Persei	4.05	3 54	35 35	68 29	5 41	W
l Leonis	5.27	10 45	10 55	17 37	5 42	E

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
α Aurigæ	4.08	5h 8m	38° 23	83° 5	5h 43m	W
α Leonis	4.13	11 17	6 25	10 18	5 49	E
α Arietis	2.23	2 3	23 7	38 53	5 54	W
γ Trianguli	4.07	2 13	33 31	61 59	5 56	W
ε Leonis	3.12	9 42	24 6	40 45	5 58	E
β Arietis	2.72	1 51	20 28	33 59	6 0	W
π^3 Cancri	5.60	8 50	30 51	55 4	6 3	E
γ^1 Leonis	2.61	10 16	20 12	33 30	6 5	E
41 Arietis	3.68	2 46	26 58	46 28	6 8	W
δ Piscium	4.55	0 45	7 12	11 34	6 9	W
α Piscium	3.72	1 28	14 59	24 25	6 10	W
i Leonis	4.12	11 20	10 55	17 37	6 16	E
ε Piscium	4.45	0 59	7 30	12 3	6 21	W
ρ Leonis	4.10	9 49	26 21	44 48	6 22	E
ζ Leonis	3.65	10 13	23 46	40 7	6 26	E
ζ Persei	2.91	3 50	31 40	57 4	6 29	W
π Virginis	4.57	11 57	7 1	11 16	6 32	E
π Piscium	5.63	1 33	11 47	19 3	6 33	W
ξ Piscium	5.57	1 10	7 12	11 34	6 34	W
θ Leonis	3.41	11 10	15 49	25 50	6 34	E
ν Arietis	5.36	2 35	21 39	36 9	6 36	W
ε Virginis	4.24	12 2	9 8	14 42	6 48	E
41 Leonis Minoris	5.05	10 40	23 34	39 44	6 52	E
ε Piscium	4.50	1 42	8 48	14 9	6 55	W
ε Arietis	4.64	2 55	21 3	35 3	7 0	W
β Leonis	2.23	11 45	14 58	24 23	7 3	E
δ Leonis	2.58	11 10	20 55	34 48	7 4	E
θ Aurigæ	2.7	5 54	37 12	75 9	7 9	W
ν Piscium	4.68	1 38	5 8	8 13	7 12	W
54 Leonis	4.51	10 52	25 8	42 46	7 15	E
i Aurigæ	2.90	4 52	33 3	60 41	7 15	W
40 Lyncis	3.30	9 17	34 42	65 32	7 16	E
ζ Arietis	4.95	3 11	20 47	34 34	7 18	W
δ Arietis	2.3 a 3.5	3 8	19 28	32 12	7 23	W
τ^1 Arietis	5.17	3 17	20 54	34 46	7 23	W
ζ Ceti	4.54	2 9	8 31	13 42	7 26	W
γ Tauri	2.96	3 43	23 53	40 20	7 29	W
α Arietis	5.46	2 48	14 47	24 5	7 31	W
ζ Virginis	4.95	12 38	10 38	17 9	7 32	E
p Tauri	5.55	4 6	26 18	45 6	7 34	W
ξ^2 Ceti	4.34	2 24	8 8	13 4	7 43	W
110 B Lyncis	6.05	8 28	38 16	81 58	7 49	E

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
μ Ceti	4.36	2h 41m	9° 49′	15° 49′	7h 51m	W
ε Virginis	2.95	12 59	11 20	18 19	7 57	E
42 Leonis Minoris	5.37	10 42	31 3	55 33	7 57	E
A Tauri	4.50	4 00	21 53	36 35	8 0	W
χ Aurigæ	4.88	5 28	32 9	58 18	8 1	W
10 Leonis Minoris	4.6	9 29	36 42	72 55	8 3	E
ν Ceti	5,04	2 32	5 17	8 28	8 6	W
24² Comæ	5.18	12 32	18 46	30 57	8 12	E
20 Comæ	5.72	12 26	21 18	35 30	8 22	E
f Tauri	4.28	3 27	12 42	20 34	8 22	W
β Tauri	1.78	5 22	28 33	49 50	8 31	W
τ Tauri	4.33	4 38	22 49	38 19	8 31	W
ξ Tauri	3.75	3 23	9 29	15 16	8 35	W
σ Tauri	3.80	3 21	8 47	14 8	8 37	W
70 Virginis	5.16	13 25	14 9	23 0	8 38	E
ε Tauri	3.63	4 24	19 1	31 24	8 42	W
46 Leonis Minoris	3.92	10 49	34 36	65 13	8 47	E
δ Tauri	3.93	4 19	17 23	28 32	8 47	W
λ Tauri	3.8 a 4.2	3 57	12 17	19 53	8 54	W
γ Tauri	3.86	4 16	15 27	25 12	8 55	W
ν Ursæ Majoris	3.71	11 15	33 29	61 53	8 57	E
θ Geminorum	3.64	6 48	34 3	63 32	8 58	W
i Tauri	4.70	4 59	21 29	35 50	9 1	W
31 Leonis Minoris	4.6	10 23	37 4	74 31	9 5	E
α Tauri	1.06	4 32	16 22	26 47	9 6	W
i Tauri	5.12	4 47	18 43	30 52	9 7	W
110 B Lyncis	6.05	8 28	38 16	81 58	9 9	W
τ Bootis	4.51	13 44	17 49	29 17	9 19	E
ν Tauri	3.94	3 59	5 47	9 16	9 30	W
π Bootis	2.80	13 51	18 45	30 56	9 31	E
31 Comæ	5.07	12 48	27 56	48 30	9 34	E
μ Tauri	4.32	4 12	8 43	14 1	9 34	W
ζ Tauri	3.00	5 33	21 6	35 13	9 38	W
3 Serpentis	5.44	15 12	5 12	8 20	9 38	E
11 Orionis	4.65	5 0	15 18	24 57	9 40	W
1 Geminorum	4.30	6 0	23 16	39 10	9 50	W
α Bootis	0.24	14 12	19 33	32 21	9 57	E
43 Comæ	4.32	13 9	28 14	49 8	9 57	E
ρ Geminorum	4.18	7 25	31 56	57 44	10 1	W
α Geminorum	1.99	7 30	32 3	58 2	10 5	W
π Geminorum	3.3 a 4.2	6 11	22 32	37 47	10 6	W
f Bootis	5.36	14 23	19 33	32 21	10 8	E

Estrêla	Grandeza	Ascenção recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
321 B Bootis	5.77	14h 53m	14º 44′	24º 0′	10h 10m	E
π^3 Orionis	3.31	4 46	6 50	10 58	10 12	W
μ Geminorum	3.19	6 19	22 33	37 49	10 14	W
ε Geminorum	3.18	6 40	25 12	42 54	10 16	W
d Bootis	4.82	14 7	25 26	43 22	10 33	E
i Geminorum	3.89	7 21	27 57	48 32	10 35	W
ν Geminorum	4.06	6 25	20 16	33 38	10 35	W
11 Bootis	6.12	13 58	27 44	48 4	10 42	E
Φ' Orionis	4.53	5 31	9 27	15 13	10 43	W
τ^1 Serpentis	5.46	15 22	15 41	25 36	10 44	E
ν Orionis	4.40	6 3	14 47	24 5	10 46	W
γ Orionis	1.70	5 21	6 17	10 5	10 49	W
β Geminorum	1.21	7 41	28 12	49 4	10 53	W
10 Leonis Minoris	4.6	9 29	36 42	72 55	10 55	W
β Serpentis	3.74	15 43	15 39	25 33	11 5	E
Groombridge 1830	6.46	11 49	38 14	81 40	11 6	E
γ Geminorum	1.93	6 34	16 28	26 57	11 7	W
ζ Geminorum	3.7 a 4.1	7 0	20 41	34 23	11 8	W
Φ Geminorum	4.99	7 49	26 57	46 26	11 12	W
χ Geminorum	5.04	7 59	28 0	48 38	11 13	W
δ Geminorum	3.52	7 16	22 7	37 1	11 14	W
α Orionis	0.5 a 1.1	5 51	7 24	10 53	11 14	W
γ Serpentis	3.86	15 53	15 54	25 58	11 16	E
40 Lyncis	3.30	9 17	34 42	65 32	11 18	W
k Geminorum	3.70	7 40	24 34	41 40	11 21	W
α Serpentis	2.75	15 41	6 39	10 40	11 21	E
k Serpentis	4.28	15 46	18 22	30 15	11 23	E
c Bootis	5.03	15 4	25 9	42 48	11 27	E
ω^1 Cancri	5 88	7 57	25 35	43 40	11 30	W
ε Geminorum	3.40	6 41	12 58	20 51	11 35	W
k Herculis	5.34	16 5	17 14	28 16	11 36	E
ω Herculis	4.53	16 22	14 12	23 6	11 36	E
σ Bootis	4.48	14 32	30 3	53 11	11 37	E
σ^2 Cancri	5.60	8 50	30 51	55 4	11 37	W
ρ Bootis	3.78	14 29	30 41	54 40	11 40	E
ψ Bootis	4.67	15 1	27 13	46 59	11 41	E
31 Leonis Minoris	4.4	10 23	37 4	74 31	11 41	W
k Ophiuchi	3.42	16 54	9 29	15 16	11 42	E
λ Geminorum	3.65	7 14	16 40	27 18	11 46	W
15 Monocerotis	4.76	6 37	9 58	16 4	11 46	W
i Cancri	4.20	8 42	29 1	50 51	11 47	W
ε Bootis	2.70	14 42	27 22	47 18	12 1	E

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
γ Herculis	3.79	16h 19m	19º 19′	31º 56′	12h 3m	E
49 Herculis	6.41	16 49	15 6	24 37	12 8	E
α Coronæ Borealis	2.31	15 32	26 57	46 26	12 9	E
109 Herculis	3.92	18 21	21 44	36 18	12 20	E
17 H Canum Venaticorum	4.96	13 32	37 33	77 0	12 26	E
α′ Herculis	3.1 a 3.9	17 11	14 28	23 32	12 26	E
β Herculis	2.81	16 27	21 39	36 9	12 26	E
β Coronæ Borealis	3.72	15 25	29 21	51 36	12 27	E
Groombridge 1830	6.46	11 49	38 14	81 40	12 32	W
ζ′ Cancri	5.10	8 8	17 52	29 23	12 33	W
ε Coronæ Borealis	4.22	15 55	27 5	46 43	12 33	E
η Cancri	5.52	8 29	20 41	34 23	12 37	W
α Ophiuchi	2.14	17 32	12 36	20 25	12 37	E
γ Cancri	4.73	8 39	21 44	36 18	12 40	W
d′ Cancri	5.88	8 19	18 34	30 36	12 40	W
β Canis Minoris	3.09	7 23	8 26	13 34	12 40	W
12² Canum Venaticorum	2.90	12 52	38 41	88 27	12 44	E
46 Leonis Minoris	3.92	10 49	34 36	65 13	12 51	W
72 Ophiuchi	3.73	18 4	9 33	15 23	12 52	E
δ Bootis	3.54	15 13	33 35	62 10	12 57	E
12³ Canum Venaticorum	2.90	12 52	38 41	88 27	13 0	W
δ Cancri	4.73	8 41	18 25	30 20	13 3	W
α Canis Minoris	0.48	7 36	5 25	8 41	13 9	W
μ Leonis	4.10	9 49	26 21	44 48	13 16	W
β Cancri	3.76	8 13	9 24	15 8	13 23	W
ε Leonis	3.12	9 42	24 6	40 45	13 26	W
42 Leonis Minoris	5.37	10 42	31 3	55 33	13 27	W
ν Ursæ Majoris	3.71	11 15	33 29	61 53	13 33	W
δ Herculis	3.16	17 12	24 55	42 21	13 34	E
83 Cancri	6.60	9 15	18 1	29 38	13 39	W
α Cancri	4.27	8 55	12 8	19 38	13 53	W
λ Herculis	4.48	17 28	26 10	44 50	13 59	E
ζ Leonis	3.65	10 13	23 46	40 7	14 0	W
ζ Herculis	3.04	16 39	31 44	57 14	14 1	E
δ Hydræ	4.18	8 34	5 57	9 32	14 4	W
μ Aquilæ	4.65	19 31	7 13	11 35	14 7	E
k Cancri	5.14	9 4	10 57	17 41	14 8	W
ε Hydræ	3.53	8 43	6 41	10 43	14 9	W
γ Bootis	3.00	14 29	38 37	86 13	14 10	E
ω Aquilæ	5.14	19 14	11 28	18 32	14 12	E
ζ² Coronæ Borealis	5.07	15 36	36 52	73 35	14 13	E
ε Herculis	3.92	16 58	31 2	55 31	14 13	E

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
ζ Aquilæ	3.02	19h 2m	13° 45′	22° 20′	14h 13m	E
ε Aquilæ	4.21	18 56	14 58	24 23	14 14	E
μ′ Bootis	4.47	15 22	37 37	77 23	14 18	E
ζ Hidræ	3.30	8 52	6 13	9 58	14 21	W
89 Herculis	5.48	17 52	26 4	44 38	14 22	E
β Aquilæ	3.90	19 52	6 13	9 58	14 23	E
γ′ Leonis	2.61	10 16	20 12	33 30	14 27	W
μ Herculis	3.48	17 44	27 46	48 9	14 28	E
41 Leonis Minoris	5.05	10 40	23 34	39 44	14 28	W
54 Leonis	4.51	10 52	25 8	42 46	14 29	W
ξ Leonis	5.12	9 28	11 37	18 47	14 29	W
α Aquilæ	0.89	19 47	8 40	13 57	14 31	E
η Leonis	3.58	10 3	17 7	28 4	14 33	W
γ Aquilæ	2.80	19 43	10 26	16 50	14 35	E
τ Aquilæ	5.65	20 1	7 4	11 21	14 37	E
110 Herculis	4.26	18 43	20 28	33 59	14 38	E
17 H Canum Venaticorum	4.96	13 32	37 33	77 0	14 38	W
d Herculis	5.27	16 59	33 40	62 25	14 44	E
ο Leonis	3.76	9 37	10 13	16 28	14 45	W
γ Bootis	3.00	14 29	38 37	86 13	14 48	W
w Herculis	5.36	17 18	32 33	59 20	14 49	E
ξ Herculis	3.82	17 55	29 15	51 22	14 52	E
ο Herculis	3.83	18 5	28 45	50 16	14 58	E
α Leonis	1.34	10 5	12 19	19 56	15 1	W
β Sagittæ	4.45	19 38	17 18	28 23	15 9	E
π Leonis	4.89	9 56	8 23	13 29	15 14	W
δ Leonis	2.58	11 10	20 55	34 48	15 16	W
δ Sagittæ	3.78	19 44	18 21	30 13	15 22	E
ε Delphini	3.98	20 30	11 3	17 52	15 26	E
ρ Leonis	3.85	10 29	9 40	15 35	15 40	W
γ Sagittæ	3.71	19 56	19 18	31 54	15 40	E
θ Leonis	3.41	11 10	15 49	25 50	15 47	W
β Delphini	3.72	20 34	14 21	23 20	15 48	E
π Herculis	3.36	17 12	36 53	73 40	15 49	E
l Leonis	5.27	10 45	10 55	17 37	15 50	W
δ Delphini	4.53	20 40	14 49	24 8	15 57	E
α Delphini	3.86	20 36	15 39	24 34	15 58	E
31 Comæ	5.07	12 48	27 56	48 30	16 2	W
γ^2 Delphini	4.49	20 43	15 52	25 55	16 6	E
β^1 Cygni	3.24	19 28	27 48	48 13	16 12	E
43 Comæ	4.32	13 9	28 14	49 8	16 21	W
χ Leonis	4.66	11 1	7 43	12 24	16 22	W

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
i Leonis	4.12	11h 20m	19° 55′	17° 37′	16h 24m	W
μ Bootis	4.47	15 22	37 37	77 23	16 26	W
γ Lyræ	3.30	18 56	32 35	59 26	16 27	E
β Leonis	2.23	11 45	14 58	24 23	16 27	W
β Lyræ	3.4 a 4.1	18 47	33 17	61 20	16 27	E
ε Pegasi	2.54	21 41	9 33	14 23	16 29	E
20 Comæ	5.72	12 26	21 18	35 30	16 30	W
24 Vulpeculæ	5.45	20 14	24 27	41 26	16 32	E
θ Pegasi	3.70	22 7	5 51	9 23	16 36	E
θ Herculis	3.39	17 54	37 15	75 25	16 40	E
σ Leonis	4.13	11 17	6 25	10 18	16 45	W
24^2 Comæ	5.18	12 32	18 46	30 57	16 52	W
ζ^2 Coronæ Borealis	5.07	15 36	36 32	73 35	16 59	W
1 Pegasi	4.27	21 19	19 30	32 15	17 4	E
20 Pegasi	5.66	21 58	12 47	20 43	17 4	E
11 Bootis	6.12	13 58	27 44	48 4	17 14	W
ο Virginis	4.24	12 2	9 8	14 42	17 16	W
ρ Bootis	3.78	14 29	30 41	54 40	17 18	W
31 Pegasi	4.93	22 18	11 51	19 10	17 19	E
π Virginis	4.57	11 57	7 1	11 16	17 22	W
ε Bootis	2.70	14 42	27 22	47 18	17 23	W
i Lyræ	5.13	19 5	35 59	69 57	17 25	E
σ Bootis	4.48	14 32	30 3	53 11	17 27	W
δ Bootis	3.54	15 13	33 35	62 10	17 29	W
ζ Pegasi	3.61	22 38	10 27	16 52	17 31	E
41 Cygni	4.09	20 26	30 8	53 23	17 32	E
32 Vulpeculæ	5 24	20 51	27 47	48 11	17 35	E
d Bootis	4.82	14 7	25 26	43 22	17 41	W
ρ Virginis	4.95	12 38	10 38	17 9	17 44	W
55 Pegasi	4.69	23 3	9 1	14 31	17 49	E
59 Pegasi	5.15	23 8	8 20	13 24	17 50	E
θ Piscium	4 45	23 24	5 59	9 36	17 54	E
ε Virginis	2.95	12 59	11 20	18 19	18 1	W
i Piscium	4.28	23 36	5 14	8 23	18 2	E
ζ Cygni	3.40	21 10	29 56	52 55	18 6	E
τ Bootis	4.51	13 44	17 49	29 17	18 9	W
η Bootis	2.80	13 51	18 45	30 56	18 11	W
70 Virginis	5.16	13 25	14 9	23 0	18 12	W
16 Pegasi	5.05	21 50	25 35	43 40	18 17	E
α Pegasi	2.57	23 1	14 49	24 8	18 18	E
ψ Bootis	4.67	15 1	27 13	46 59	18 21	W
β Coronæ Borealis	3.72	15 25	29 21	51 36	18 23	W

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
θ Lyræ	4.46	19h 14m	38° 0′	79° 50′	18h 23m	E
i Pegasi	3.96	22 4	25 0	42 30	18 24	E
15 Cygni	5.02	19 41	37 11	75 4	18 26	E
α Bootis	0.24	14 12	19 33	32 21	18 27	W
70 Pegasi	4.67	23 25	12 22	20 1	18 28	E
ε Cygni	2.64	20 43	33 42	62 30	18 28	E
ω Piscium	4.03	23 56	6 28	10 23	18 28	E
π Herculis	3.36	17 12	36 53	73 40	18 35	W
f Bootis	5.36	14 23	19 33	32 21	18 38	W
c Bootis	5.03	15 4	25 9	42 48	18 41	W
λ Pegasi	4.14	22 43	23 11	39 0	18 52	E
α Coronæ Borealis	2.31	15 32	26 57	46 26	18 55	W
μ Pegasi	3.67	22 47	24 13	40 59	19 4	E
θ Herculis	3.39	17 54	37 15	75 25	19 8	W
d Herculis	5.27	16 59	33 40	62 25	19 14	W
ζ Herculis	3.04	16 39	31 44	57 14	19 17	W
ε Coronæ Borealis	4.22	15 55	27 5	46 43	19 17	W
δ Piscium	4.55	0 45	7 12	11 34	19 21	E
γ Pegasi	2.87	0 10	14 47	24 5	19 26	E
τ Pegasi	4.65	23 17	23 21	39 15	19 27	E
Φ Pegasi	5.23	23 49	18 43	30 52	19 29	E
ν Pegasi	4.57	23 22	23 1	38 41	19 30	E
321 B Bootis	5.77	14 53	14 44	24 0	19 36	W
ε Piscium	4.45	0 59	7 30	12 3	19 37	E
π Pegasi	4.38	22 7	32 50	60 6	19 41	E
ε Herculis	3.92	16 58	31 2	55 31	19 43	W
η Pegasi	3.10	22 40	29 51	52 44	19 43	E
β Pegasi	2.61	23 0	27 42	48 0	19 44	E
ζ′ Piscium	5.57	1 10	7 12	11 34	19 46	E
w Herculis	5.36	17 18	32 33	59 20	19 47	W
τ_1 Serpentis	5.46	15 22	15 41	25 36	20 0	W
α Serpentis	2.75	15 41	6 39	10 40	20 1	W
ν Piscium	4.68	1 38	5 8	8 13	20 4	E
θ Lyræ	4.46	19 14	38 0	79 50	20 5	W
k Serpentis	4.28	15 45	18 22	30 15	20 7	W
τ Cygni	3.85	21 12	37 44	78 5	20 12	E
β Serpentis	3.74	15 43	15 39	25 33	20 21	W
β Herculis	2.81	16 27	21 39	36 9	20 28	W
ο Piscium	4.50	1 42	8 48	14 9	20 29	E
61 Cygni	5.57	21 3	38 24	83 16	20 29	E
γ Serpentis	3.86	15 53	15 54	25 58	20 30	W
π Piscium	5.63	1 33	11 47	19 3	20 33	E

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
k Herculis	5.34	16h 5m	17° 14′	28° 16′	20h 34m	W
γ Herculis	3.79	16 19	19 19	31 56	20 35	W
72 Pegasi	5.21	23 30	30 56	55 16	20 44	E
i Lyræ	5.13	19 5	35 59	69 57	20 45	W
3 Serpentis	5.44	15 12	5 12	8 20	20 46	W
π Piscium	3.72	1 28	14 59	24 25	20 46	E
δ Herculis	3.16	17 12	24 55	42 21	20 50	W
ζ′ Ceti	4.54	2 9	8 31	13 42	20 52	E
μ Ceti	4.36	2 41	9 49	15 49	20 54	E
15 Cygni	5.02	19 41	37 11	75 4	20 56	W
ζ Andromedæ	4.30	0 43	23 53	40 20	20 57	E
λ Herculis	4.48	17 28	26 10	44 50	20 57	W
α Andromedæ	2.15	0 5	28 42	50 9	20 57	E
ξ Herculis	3.82	17 55	29 15	51 22	20 58	W
ν Ceti	5 04	2 32	5 17	8 28	20 58	E
μ Herculis	3.48	17 44	27 46	48 9	21 0	W
ξ^2 Ceti	4.34	2 24	8 8	13 4	21 5	E
β Lyræ	3.4 a 4.1	18 47	33 17	61 20	21 7	W
ω Herculis	4.53	16 22	14 12	23 6	21 8	W
o Herculis	3.83	18 5	28 45	50 16	21 12	W
89 Herculis	5 48	17 52	26 4	44 38	21 22	W
γ Lyræ	3.30	18 56	32 35	59 26	21 25	W
ε Andromedæ	4.52	0 35	28 55	50 38	21 29	E
49 Herculis	6.41	16 49	15 6	24 37	21 30	W
61 Cygni	5.57	21 3	38 24	83 16	21 37	W
β Arietis	2.72	1 51	20 28	33 59	21 42	E
δ Andromedæ	3.49	0 35	30 28	54 10	21 44	E
ν Piscium	4.67	1 15	26 53	46 19	21 52	E
α′ Herculis	3.1 a 3.9	17 11	14 28	23 32	21 56	W
o Tauri	3.80	3 21	8 47	14 8	22 5	E
α Arietis	5.46	2 48	14 47	24 5	22 5	E
τ Piscium	4.70	1 8	29 43	52 25	22 6	E
k Ophiuchi	3.42	16 54	9 29	15 16	22 6	W
ξ Tauri	3.75	3 23	9 29	15 16	22 11	E
α Arietis	2.23	2 3	23 7	38 53	22 12	E
τ Cygni	3.85	21 12	37 44	78 5	22 12	W
π Andromedæ	4.47	0 33	33 19	61 25	22 13	E
109 Herculis	3.92	18 21	21 44	36 18	22 22	W
10 Lacertæ	4.91	22 36	38 40	87 20	22 23	E
α Ophiuchi	2.14	17 32	12 36	20 25	22 27	W
ν Tauri	3.94	3 59	5 47	9 16	22 28	E
γ Trianguli	4.07	2 13	33 31	28 1	22 30	E

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem	Posição em relação ao meridiano
f Tauri	4.28	3h 27m	12º 42′	20º 34′	22h 32m	E
ν Arietis	5.36	2 35	21 39	36 9	22 34	E
σ Andromedæ	4.50	0 14	36 23	71 30	22 41	E
β^1 Cygni	3.24	19 28	27 48	48 13	22 44	W
α Trianguli	3.58	1 49	29 14	51 20	22 46	E
110 Herculis	4.26	18 43	20 28	33 59	22 48	W
10 Lacertæ	4.91	22 36	38 40	87 20	22 49	W
μ Tauri	4.32	4 12	8 43	14 1	22 50	E
ε Arietis	4.64	2 55	21 3	35 3	22 50	E
δ Arietis	2.3 a 3.5	3 8	19 28	32 12	22 53	E
ε Cygni	2.64	20 43	33 42	62 30	22 58	W
λ Tauri	3.8 a 4.2	3 57	12 17	19 53	23 0	E
ζ Arietis	4.95	3 11	20 47	34 34	23 4	E
β Andromedæ	2.4	1 5	35 14	67 16	23 8	E
τ′ Arietis	5.17	3 17	20 54	34 46	23 11	E
72 Ophiuchi	3.73	18 4	9 33	15 23	23 16	W
π^3 Orionis	3.31	4 46	6 56	10 58	23 20	E
41 Cygni	4.09	20 26	30 8	53 23	24 20	W
41 Arietis	3.68	2 46	26 58	46 28	23 24	E
γ Tauri	3.86	4 16	15 27	25 12	23 37	E
ε Aquilæ	4.21	18 56	14 58	24 23	23 38	W
ζ Aquilæ	3.02	19 2	13 45	22 20	23 51	W
δ Tauri	3.93	4 19	17 23	28 32	23 51	E
γ Orionis	1.70	5 21	6 17	10 5	23 53	E
24 Vulpeculæ	5.45	20 14	24 27	41 26	23 56	W
π Tauri	2.96	3 43	23 53	40 20	23 57	E
α Tauri	1.06	4 32	16 22	26 47	23 58	E

Lista de estrêlas para a determinação da latitude astronómica por observação de passagens no 1.º vertical de Lisboa.

($\varphi = 38^0\ 43'$ N)

Estrêla	Grandeza	Ascensão recta	Declinação	Altura	Hora sideral da passagem E	Hora sideral da passagem W
σ Andromedæ	4.5	0h 14m	36º 23′	71º 30′	22h 41m	1h 47m
μ Andromedæ	3.9	0 52	38 06	80 35	0 04	1 40
β Andromedæ	2.4	1 05	35 14	67 16	23 08	2 57
ρ Persei	3.4 a 4.2	3 00	38 33	85 07	2 35	3 25
μ Aurigæ	4.8	5 08	38 23	83 05	4 33	5 43
θ Aurigæ	2.7	5 54	37 12	75 09	4 39	7 09
110 B Lyncis	6.05	8 28	38 16	81 58	7 47	9 09
10 Leonis Minoris	4.6	9 29	36 42	72 55	8 03	10 55
31 Leonis Minoris	4.4	10 23	37 04	74 31	9 05	11 41
Groombridge 1830	6.5	11 49	38 14	81 40	11 06	12 32
12^2 Canum Venat.	2.9	12 52	38 41	88 27	12 44	13 00
17 H Canum Venat.	4.96	13 32	37 33	77 0	12 26	14 38
γ Bootis	3.00	14 29	38 37	86 13	14 10	14 48
μ' Bootis	4.47	15 22	37 37	77 23	14 18	16 26
ζ^2 Coronæ Borealis	5.07	15 36	36 52	73 35	14 13	16 59
π Herculis	3.36	17 12	36 53	73 40	15 49	18 35
θ Herculis	3.39	17 54	37 15	75 25	16 40	19 08
α Lyræ (Vega)	0.14	18 35	38 43	90 00	18 35	18 35
θ Lyræ	4.46	19 14	38 00	79 50	18 23	20 5
15 Cygni	5.02	19 41	37 11	75 04	18 26	20 56
61 Cygni	5.57	21 03	38 24	83 16	20 29	21 37
τ Cygni	3.85	21 12	37 44	78 05	20 12	22 12
10 Lacertæ	4.91	22 36	38 40	87 20	22 23	22 49

Bibliografia

Henrique ne Barros Gomes — A astronomia moderna e a questão das paralaxes siderais. (Lisboa; 1872)

W. Struve — Notice sur l'instrument des passages de Repsold, établi à l'Observatoire de Poulkova dans le premier vertical et sur les résultats que cet instrument a donné pour l'évaluation de la constante de l'aberration. (Altona; Astronomische Nachrichten n.os 468, 469 e 472; 1843)

Hill, George A — Observations made with the prime vertical transit instrument 1893-1912. (Washington; 1926)

W. Struve — Observations faites à l'instrument des passages établi dans le premier vertical (1840-1855). (St. Pétersbourg; Observations de Poulkova; 1870)

O. Struve. — Observations faites à l'instrument des passages établi dans le premier vertical (1858-1859). (St. Pétersbourg; Observations de Poulkova; 1870)

Frederico Augusto Oom — Déclinaisons des étoiles zénithales (1861-1863). (St. Pétersbourg; Observations de Poulkova; 1870)

W. Chauvenet — A manual of spherical and practical astronomy. (Philadelphia; 1906)

Sir Frank Dyson — Declinations of stars derived from observations of transits in the prime vertical with the altazimuth in the years 1923-1926. (Royal Observatory Greenwich; 1928)

Tisserand — Traité de Mécanique Céleste.

F. Küstner — Zur Bestimmung der Aberrations — Constante aus Meridian-Zenithdistanzen unabhängig von den Schwankungen der Polhöhe. (Astronomiche Nachrichten n.º 3015)

W. Struve — Extrait de la mémoire sur le coefficient constant dans l'aberration des étoiles fixes, déduit des observations exécutées à l'Observatoire de Poulkova par l'instrument des passages de Repsold, établi dans le premier vertical. (Astronomiche Nachrichten n.º 484)

ÍNDICE

Introdução 55
Teoria do instrumento de passagens no 1.º vertical. Fórmulas gerais 58
Transformação das fórmulas anteriores. Instalação do instrumento e determinação dos erros instrumentais 60
Nova transformação das fórmulas gerais. Determinação da latitude astronómica 67
Determinação da latitude observando passagens de estrêlas no primeiro vertical. (Método de Bessel) 71
Reducção das observações ao fio do meio 78
Determinação da latitude astronómica observando as passagens E. e W. da mesma estrêla 80
Determinação dos erros instrumentais quando as observações são feitas pelo método de Struve 95
Determinação das declinações das estrêlas observando as suas passagens no primeiro vertical 97
Determinação da constante de aberração anual, das paralaxes das estrelas e da constante de nutação 104
Lista de estrelas ordenadas segundo as horas aproximadas das suas passagens no primeiro vertical de Lisboa 115
Lista de estrêlas para a determinação da latitude astronómica por observação de passagens no primeiro vertical de Lisboa..... 127
Bibliografia..... 129